

## Grundsätzliche Gesetzmäßigkeiten zum Thema Signal-Rausch-Verhältnis (von Lothar Schanne)

In D.F. Gray, *The Observation and Analysis of Stellar Photospheres*, John Wiley & Sons, New York 1976, habe ich einen verblüffend einfachen, aber instruktiven und leicht zu verstehenden Abschnitt über das Verhältnis von Messsignal und überlagerndem Rauschen gefunden, den ich hier wegen des grundsätzlichen und wichtigen Inhalts mit meinen Worten, inhaltlich etwas erweitert und auf unsere Bedürfnisse angepasst, weitergeben möchte.

Wir messen mit unserem Spektrographen das wellenlängendispersiv (Gitter) oder energiedispersiv (Prisma) Spektrum. In Dispersionsrichtung benutzen wir eine Reihe von gleichartigen Detektoren, beispielsweise die Pixel der CCD-Kamera oder die lichtempfindlichen Körner eines photographischen Films. Der Einfachheit halber betrachten wir im Folgenden ein einzelnes Pixel, dem über die Optik eine bestimmte Anzahl Lichtquanten  $l$  einer bestimmten Wellenlänge zugeführt wird. Diese Menge  $l$  ergibt sich aus einem zeitlich konstantem Lichtfluss (Flux)  $L$ , multipliziert mit der Belichtungszeit  $t$ . Es gilt

$$l = L \cdot t$$

Wir gehen davon aus, dass die Bose-Einstein-Statistik des Photonenrauschens näherungsweise beschrieben wird durch die mittlere Fluktuation

$$\Delta l = \sqrt{l}$$

Die Quantenanzahl  $l$  wird durch den linear arbeitenden Detektor (ein Pixel) in ein Signal transformiert, dem während der Belichtungszeit  $t$  Rauscheffekte überlagert werden, die thermisch vom Detektor, durch Streulicht, Himmelshintergrund, die Elektronik etc. erzeugt werden und die zu einem Background  $b^1$  zusammengefasst werden können. Die entsprechende Backgroundrate ist  $B (= b/t)$ . Die Fluktuationen von  $b$  seien ebenfalls zufälliger Natur, so dass auch sie gausskurvenähnlich verteilt sind. Dann gilt für die mittlere Fluktuation des Backgrounds  $b$

$$\Delta b = \sqrt{b}$$

Wir messen die Summe  $n$  aus der echten Photonenmenge und der durch das Rauschen vorgetäuschten Photonenmenge.

$$n = l + b = (L + B) \cdot t$$

Den Rauschanteil  $b$  ziehen wir vom Messsignal  $n$  ab, soweit wir ihn kennen. In der Regel berücksichtigen wir den Dunkelstrom, das Ausleserauschen, den Himmelshintergrund ...<sup>2</sup> Dabei berechnen wir eine korrigierte Größe  $S$  (Signal) aus den beiden Messgrößen  $n$  und  $b$  (oder  $n$ ,  $B$  und  $t$ )

$$S = n - b = n - B \cdot t$$

Der quadratisch gemittelte Fehler  $\Delta S$  von  $S$  ist dann<sup>3</sup>

$$\Delta S = (\Delta n^2 + \Delta b^2)^{1/2}$$

oder mit obigen Fehlerausdrücken für  $\Delta n$  und  $\Delta b$

$$\Delta S = (n + b)^{1/2}$$

---

<sup>1</sup> Ausgedrückt durch eine dem Rauschen äquivalente Anzahl Photonen.

<sup>2</sup> Tatsächlich arbeiten wir nicht mit Quantenanzahlen, sondern mit einer Messgröße, bei CCD-Kameras mit Elektronen/Pixel, die im linearen Bereich des Detektors (Pixel) der Quantenanzahl  $n$  proportional ist. Das lässt sich in den mathematischen Gleichungen berücksichtigen, kompliziert die Sache aber nur, ohne zu wesentlichen Erkenntnissen zu führen. Deshalb tun wir hier so, als würde unser Detektorsystem direkt die Quanten zählen.

<sup>3</sup> Das entspricht einer Faltung der beiden Gaußverteilungen von  $n$  und  $b$ .

Das Signal-Rausch-Verhältnis beträgt dann

$$\frac{S}{\Delta S} = \frac{S}{\sqrt{n+b}} = \left( \frac{L \cdot t}{1+2B/L} \right)^{1/2} \quad (1)$$

Diese Beziehung ist für uns von hoher praktischer Bedeutung, wie wir gleich sehen werden

Betrachten wir den von uns angestrebten **Fall  $B/L \ll 1$** . Die Rauschrate ist verschwindend klein im Vergleich zur Photonenerate. Dann ist das Signal-Rausch-Verhältnis identisch mit dem reinen Photonenrauschen und nur abhängig vom Produkt aus der Belichtungszeit (Integrationszeit) und dem Lichtfluss, also der Anzahl Quanten, die das messende Pixel erreicht.

$$\frac{S}{\Delta S} \approx \left( \frac{L \cdot t}{1+0} \right)^{1/2} = \sqrt{S} \quad (2)$$

Das Signal-Rausch-Verhältnis kann durch jede Maßnahme verbessert werden, welche die belichtende Lichtmenge (Quantenanzahl  $S$ ) erhöht, z.B. durch eine Verlängerung der Belichtungszeit  $t$ . Der relative Messfehler<sup>4</sup> verbessert sich aber nur mit der Wurzel aus der Belichtungszeit. Alternativ kann das Signal-Rausch-Verhältnis erhöht werden durch alle weiteren Maßnahmen, die den registrierten Lichtfluss  $L$  verstärken (größere Teleskopöffnung, kleinere Teleskopbrennweite, optimale Fokussierung, öffnen des Spalts, höhere Quantenausbeute des CCD, höhere Transmissivität der Optik, optimiertes blazing des Gitters, geringere Dispersion des Gitters). Aber auch hier wächst das Signal-Rausch-Verhältnis nur mit der Wurzel des Lichtfluss  $L$ . Entspricht  $S$  etwa 10.000 Lichtquanten, beträgt das Signal-Rausch-Verhältnis  $10.000^{1/2} = 100$ . Um beispielsweise bei gleicher Messgenauigkeit zu bleiben, können  $L$  und  $t$  so variiert werden, dass ihr Produkt gleich bleibt. Beispielsweise kann bei verzehnfachtem  $L$  die Belichtungszeit  $t$  auf ein Zehntel verkürzt werden, ohne dass der relative Messfehler verändert wird. Wohlgemerkt: Das Signal-Rausch-Verhältnis kann mit obigen Maßnahmen verbessert werden, obwohl nichts an der Rauschrate  $B$  geändert wurde! **Verbesserungsmaßnahmen an der Rauschrate  $B$  bewirken im Fall  $B/L \ll 1$  (fast) nichts mehr.**

Ist dagegen die Messung stark verrauscht, ist also  **$B/L \gg 1$** , dann gilt

$$\frac{S}{\Delta S} \approx \left( \frac{L \cdot t}{2B/L} \right)^{1/2} = \left( \frac{t}{2B} \right)^{1/2} \cdot L \quad (3)$$

Diese Situation ergibt sich an jeder Messapparatur, wenn nur der Lichtfluss  $L$  hinreichend gering ist, das Messobjekt also zu lichtschwach ist. Der Lichtfluss  $L$  erhöht direkt proportional das Signal-Rausch-Verhältnis. Jede Maßnahme, welche  $L$  erhöht, führt zur unmittelbaren Verbesserung des Signal-Rausch-Verhältnisses. Eine Verlängerung der Belichtungszeit trägt nur in geschwächter Form (Wurzel) zur Verbesserung bei, ebenso jede Maßnahme, welche die Rauschrate  $B$  verringert. Bei festem  $L$  (durch Messapparatur und Objekt definiert) bleibt nur, das Verhältnis  $t/B$  zu vergrößern, wobei die Verringerung der Rauschrate gleich wichtig ist wie die Verlängerung der Belichtungszeit. **Jegliche Maßnahme zur Minderung der Rauschrate  $B$  ist erwünscht.** Der bei schwachen Objekten dominant werdende Himmelshintergrund kann beispielsweise bei spaltlosen Spektrographen dadurch gemindert werden, dass ein breiter Spalt quer zur Dispersionsrichtung in die Fokusebene des Teleskops in-

<sup>4</sup> Die zum Signal-Rausch-Verhältnis  $S/\Delta S$  reziproke Größe ist der relative Messfehler  $\Delta S/S$ . Ein  $S/\Delta S = 100$  entspricht  $\Delta S/S = 1\%$ .

tegiert wird, wodurch das Himmelshintergrund liefernde Gesichtsfeld in Dispersionsrichtung des Spektrographen eingeengt wird.

An der einfachen Gleichung (1) kann man sich in fundamentaler Weise klar machen, wie ein gutes Signal-Rausch-Verhältnis erreicht werden kann. Man muss wissen, wodurch das Signal-Rausch-Verhältnis der eigenen Messungen im Wesentlichen gesteuert wird, was natürlich fallweise von der Apparatur, aber auch vom Objekt und vom Himmelshintergrund abhängt. Hat man bereits  $B/L \ll 1$  erreicht, nutzt es wenig, das Rauschen weiter zu drücken. Dann müssen die Parameter optimiert werden, welche das Produkt  $L \cdot t$  erhöhen.

Messtechnisch kann die das Signal-Rausch-Verhältnis beeinflussende Größe

$$\frac{L}{1 + 2B/L}$$

folgendermaßen ermittelt werden:

Es wird an einem Objekt eine Serie von Spektren unterschiedlicher Integrationszeit bei gleicher Einstellung des Spektrographen aufgenommen. Die Quadrate der ermittelten Signal-Rausch-Verhältnisse jeder Messung werden aufgetragen gegen die Integrationszeit (Abszisse)<sup>5</sup>. Die Steigung der Ausgleichsgerade durch die Punkte ergibt die gesuchte Größe. Wird die gleiche Messreihe bei gleichzeitiger Anwendung von Lochblenden vor der Teleskopöffnung wiederholt, welche den Lichtfluss  $L$  um bekannte Beträge verringern, ergeben sich Geraden unterschiedlicher Steigung, aus denen dann unter Nutzung der berechneten unterschiedlichen  $L$  die Größe  $B$  berechnet werden kann. Damit ist dann bestimmbar, bei welcher Helligkeit des Objekts ( $L$ ) das Verhältnis  $B/L$  ungünstig wird. Alternativ können auch Messreihen an Sternen unterschiedlicher Magnituden, aber (fast) gleichen Spektraltyps, als grobes Maß für den Lichtfluss  $L$ , durchgeführt werden.

Es gibt in der Literatur Beispiele dafür, wie die Rauschraten oder das Rauschen berechnet oder aus Apparategrößen geschätzt werden können. Beispielsweise gibt Christian Buil für das Signal-Rausch-Verhältnis (SNR) an<sup>6</sup>:

$$SNR = \frac{C \cdot T_i}{\sqrt{C \cdot T_i + N_s (B + D) \cdot T_i + \frac{N_s}{N_b} \cdot N_r \cdot S^2}}$$

mit

- Ti Gesamt-Belichtungszeit in s
- C Signal des Sterns in Elektronen/s nach vertikalem binning
- B Himmelshintergrund in Elektronen/(s·Pixel)
- D thermische Rauschrate in Elektronen/(s·Pixel)
- Nb Anzahl der über die Vertikale (senkrecht zur Dispersion) gebinnter Pixel
- Ns Anzahl der über die Horizontale (entlang der Dispersion) gebinnter Pixel
- Nr Anzahl der Aufnahmen, die zum Erreichen von Ti summiert wurden
- Ausleserauschen der Kamera, z.B. 17 Elektronen für die Audine Kamera

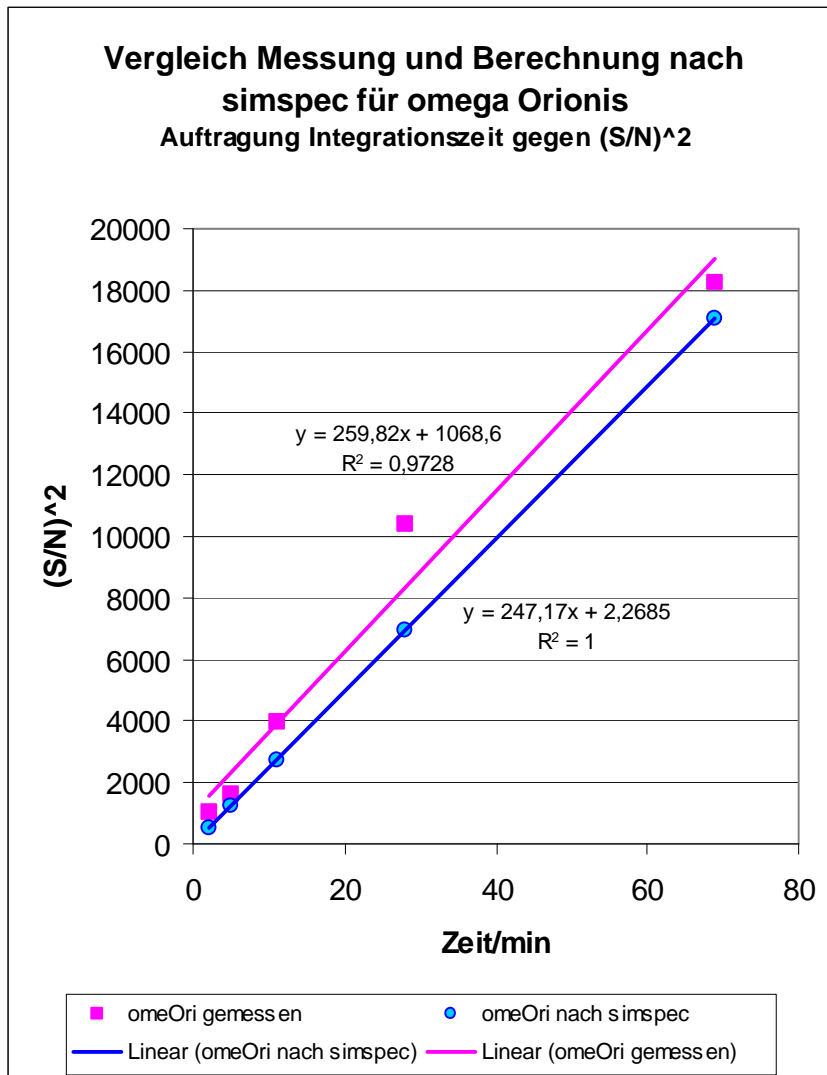
Dieser Ausdruck entspricht unserer Grundformel  $\frac{S}{\Delta S} = \frac{S}{\sqrt{n+b}}$ , wobei neben dem

Himmelshintergrund und dem thermischen Rauschen zusätzlich das Ausleserauschen der summierten Aufnahmen berücksichtigt ist. Diese mathematischen Zu-

<sup>5</sup> Die Datenreduktionsmethode muss natürlich bei allen Auswertungen gleich sein.

<sup>6</sup> <http://astrosurf.com/buil/us/spe2/hresol1.htm#h9>

sammenhänge sind in dem Excel-Kalkulationsprogramm SIMSPEC von C. Buil implementiert und stehen für den Gebrauch zur Verfügung.



Ein Beispiel zum Vergleich von Messung und Berechnung mit SIMSPEC:

Für eine Auswertungsreihe von insgesamt 69 60s-Aufnahmen von omega Orionis, reduziert mit MIDAS/OPA, wurden für unterschiedliche Anzahlen von Aufnahmen (also variierende Gesamtbelichtungszeit) mit MIDAS/OPA die Signal-

Rausch-Verhältnisse der normierten Spektren im Bereich 6520 bis 6640 Å (54 Pixel) ermittelt. Parallel dazu wurden mit simspec unter Verwendung der apparativen Parameter meiner Messanordnung<sup>7</sup>, 4,5 mag für die Sterngröße und 22.000 K als effektive Stern-temperatur<sup>8</sup> die Signal-Rausch-Verhältnisse berechnet. Der Ver-

gleich ist im Diagramm dargestellt. Die Linearität der Beziehung zwischen Integrationszeit und gemessenem  $(S/N)^2$  ist gut ( $R = 0,97$ ). Dass die beiden Ausgleichsgeraden sich fast decken, sollte nicht zu sehr überraschen, weil das Ergebnis von simspec natürlich durch geschickte Wahl der Parameter angepasst werden kann (hier  $T_{\text{eff}}$ ). Es wurden aber keine unplausiblen Parameter gewählt, wie die Tabelle am Schluss des Artikels belegt.

Unsere Grundgleichung (1) gilt streng für Spektren, bei denen nur Rauscheffekte eingehen, die proportional der Messzeit  $t$  entstehen. Dazu gehört nicht das Ausleserauschen, was in der Formel aus simspec aber enthalten ist. Eine genaue (hier nicht dargestellte) Analyse der Beiträge der einzelnen Rauschgrößen in simspec zu obiger Grafik zeigt, dass in diesem Fall das SNR hauptsächlich durch das Ausleserauschen bestimmt wird. Für die 69 60s-Aufnahmen wird ein  $\text{SNR} = 130,6$  berechnet (gemessen 135). Würde stattdessen eine Aufnahme 69 min lang belichtet, wäre nach SIMSPEC ein  $\text{SNR}$  von 249 zu erwarten. Dieses  $\text{SNR}$  würde erst bei 250 60s-

<sup>7</sup> 5"-Maksutov-Newton Intes Micro MN58 1:8, Eigenbau Spektrograph mit 41 Å/mm, Audine-CCD-Kamera wassergekühlt mit KAF 401E, 0,37 Å/Pixel.

<sup>8</sup>  $T_{\text{eff}}$  beträgt nach C.Neiner et al, A&A 409, 275-286 (2003)  $20.020 \pm 700$  K

Aufnahmen erreicht werden, was eine Belichtungszeitverlängerung um den Faktor 3,6 bedeutet. Das zeigt deutlich die Marschrichtung für die Verbesserung meiner Messtechnik an: Die Nachführung sollte so optimiert werden, dass lange Belichtungszeiten möglich werden. Es lohnt sich offensichtlich, die eigene Messapparatur und -routine mit Hilfe von SIMSPEC auf Möglichkeiten der Optimierung des SNR zu untersuchen und die Ergebnisse experimentell umzusetzen.

## Berechnung für omega Orionis mit SIMSPEC:

SIMSPEC V2.2 (11 mars 2003) - Simulation d'un spectrographe à réseau à reflexion -Christian Buil

Paramètres télescope		Paramètres spectrographe		Paramètres CCD	
Diamètre (D) :	127 mm	Focale collimateur (f1) :	135 mm	Taille d'un pixel (p) :	9 microns
Focale (f) :	1016 mm	Focale caméra (f2) :	135 mm	Nombre de pixels (Nx) :	768
F/D (F#) :	8	Nombre de traits / mm (m) :	1200	RQE ( $\eta$ ) :	54 %
Obstruction centrale ( $\epsilon$ ) :	0,22	Ordre de diffraction (k) :	-1	Bruit de lecture (RON) :	18 e-/pixel
Transmission télescope (To) :	0,85	Angle total ( $\gamma$ ) :	45 °	Signal thermique (Nd) :	0,1 e-/s/pixel
Observation		Longueur d'onde calage ( $\lambda_0$ ) :		6630 Å	
Seeing ( $\theta$ ) :	4 "	Tirage réseau-objectif (T) :	60 mm		
Transmission atmosphérique (Ta) :	0,75	Transmission spectro (Ts) :	0,42		
Magnitude du ciel (ms) :	18	Largeur de la fente (w) :	1 mm		
Temps de pose total (t) :	1680	FWHMc :	10 microns		
Nombre de poses élémentaires (n) :	28	FWHMo :	18 microns		
Etoile		Prétraitement			
Magnitude (m) :	4,5	Fraction intégrée axe trans. (k) :	1		
Température effective (Te) :	22000 K	Binning axe dispersion (fx) :	1		
Correction Bolométrique (BC) :	-0,4	Binning axe transverse (fy) :	1		
		Binning numérique transverse (q) :	9		
Résultats					
Diamètre minimal collimateur (d1) :	16,875 mm				
F/D minimal collimateur (Fc) :	8				
Angle d'incidence ( $\alpha$ ) :	-3,004095805 °				
Angle de diffraction ( $\beta$ ) :	-48,00409581 °				
Taille minimale réseau (W) :	16,89822169 mm				
Anamorphose (r) :	1,492541327				
Diamètre objectif à $\lambda_0$ (d2) :	11,3062196 mm				
Diamètre minimal objectif (d'2) :	14,3782196 mm				
F/D minimal objectif (Fo) :	9,38920143				
Dispersion (p) :	0,371709712 Å/pixel	Nombre de photons (E) :	2,54888699 photons/cm2/s/Å		
Lambda min. ( $\lambda_1$ ) :	6487,263471 Å	Nombre de photons du ciel (Ed) :	6,3096E-06 photons/cm2/s/Å/arcsec		
Lambda max. ( $\lambda_2$ ) :	6772,736529 Å	Efficacité (R) :	0,13758709		
FWHMd :	7,916439198 microns	Signal utile (Nm) :	27742,0638 e-/pixel		
FWHMt :	39,43635867 microns	Signal de fond de ciel (Ns) :	25,4587183 e-/pixel		
Facteur d'échantillonnage :	2,190908815	Bruit ( $\sigma$ ) :	333,363454 e-		
Pouvoir de résolution (R) :	4070,570887	Signal/Bruit (SNR) :	83,2186716		