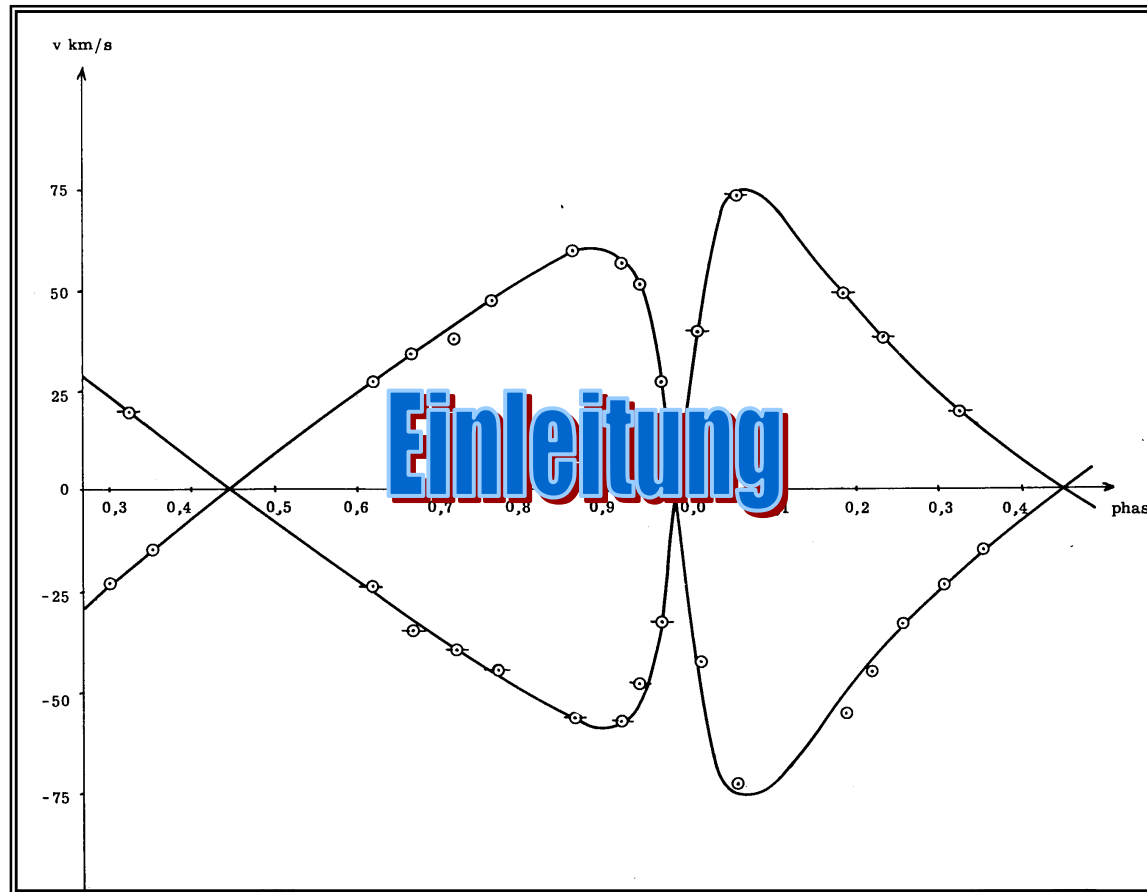


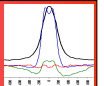
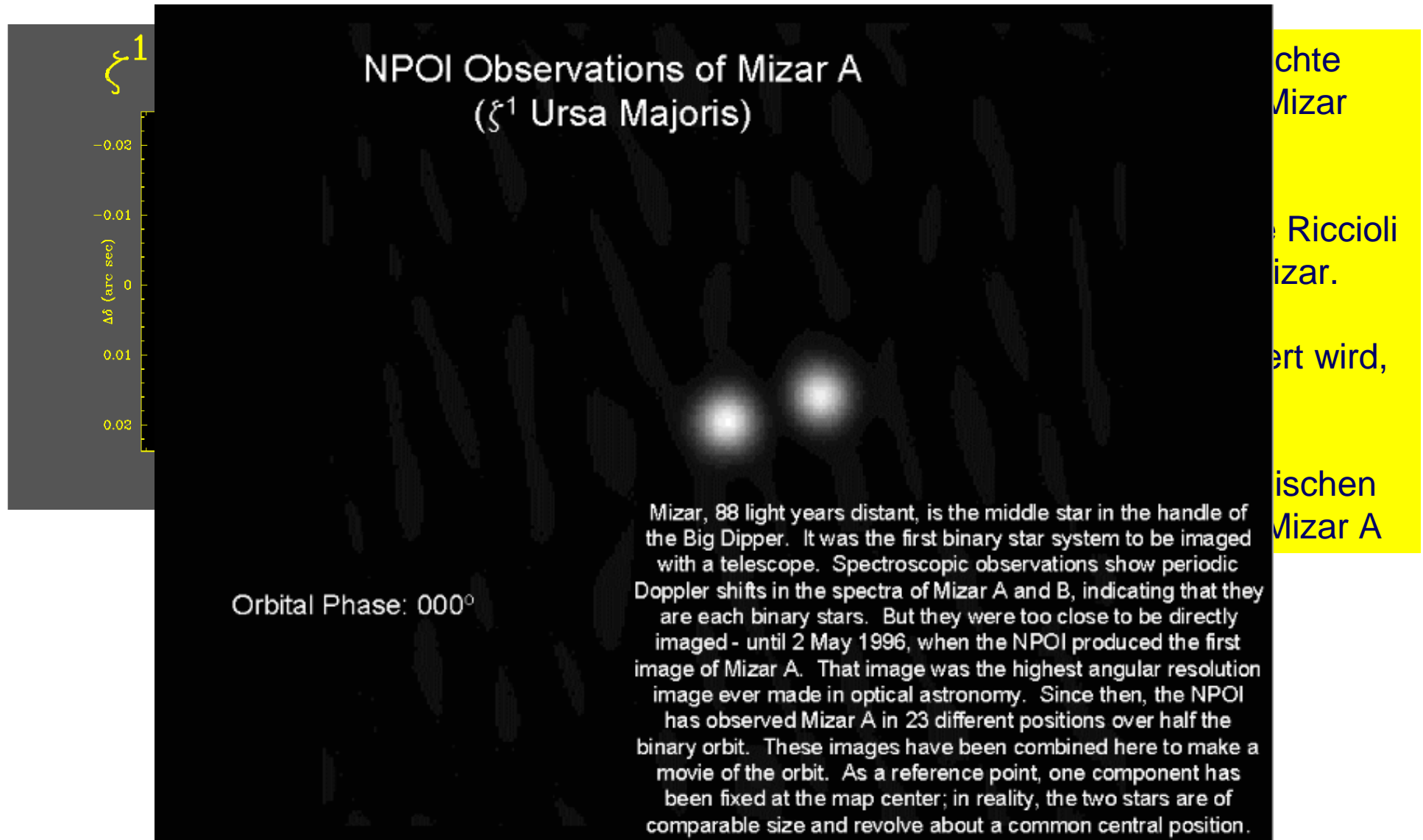
Die Bestimmung der Bahnelemente von Mizar A durch Messung der Radialgeschwindigkeitskurven beider Komponenten



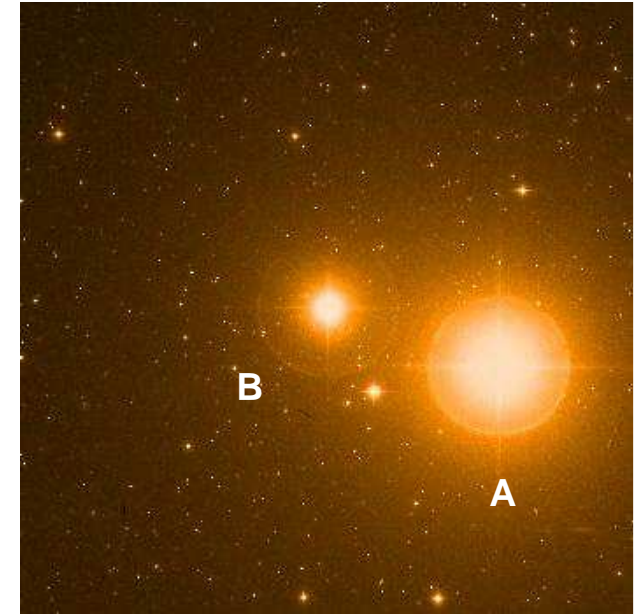
Fehrenbach, 1961



Die Bestimmung der Bahnelemente von Mizar A durch Messung der Radialgeschwindigkeitskurve



Einige Daten zum 5 fach
Sternsystem
Mizar A, B und Alkor



Entfernung von Mizar: 78,2 Lichtjahre
 Entfernung von Alkor: 81,2 Lichtjahre
Abstand von Mizar Aa und Mizar Ab: 0,29 AE
Umlaufzeit von Mizar Aa und Mizar Ab: 20,454 Tage
 Abstand von Mizar Ba und Mizar Bb: 3,12 AE
 Umlaufzeit von Mizar Ba und Mizar Bb: 57 Jahre
 Abstand von Mizar A und Mizar B: 345 AE
 Abstand von Mizar und Alkor: 200 000 AE

Mizar Aa und Ab

Spektralklasse Aa und Ab: **A1**
Größenklasse Aa und Ab: **2,25**
Leuchtkraft Aa und Ab: **63 * Sonne**
Masse Aa: **7,7 * Sonne**
 Durchmesser Aa: 4,12 * Sonne

Mizar Ba und Bb

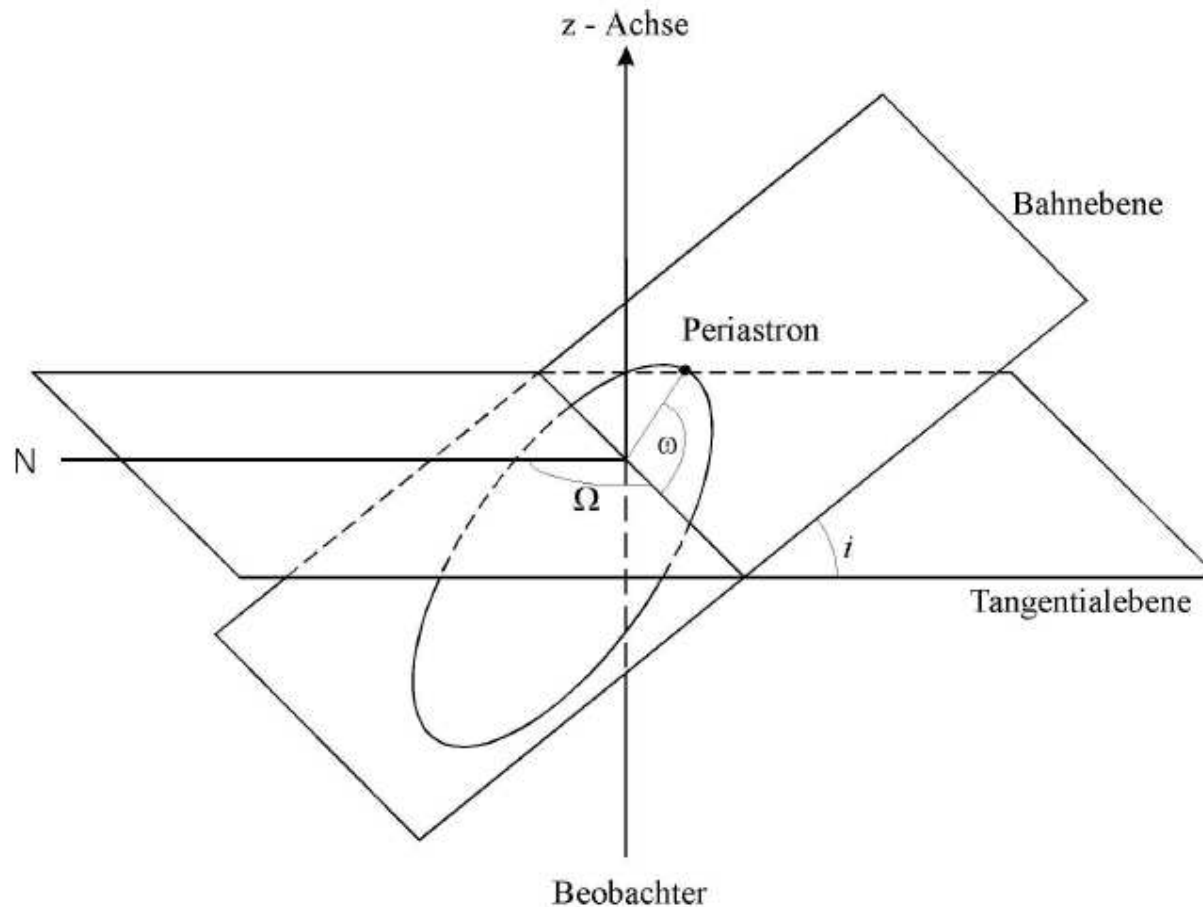
Spektralklasse Ba und Bb: A1
 Größenklasse Ba und Bb: 3,95
 Leuchtkraft Ba und Bb: 13,2 * Sonne
 Durchmesser Ba: 3,89 * Sonne

Alkor

Spektralklasse: A5
 Größenklasse: 4,01
 Leuchtkraft: 13,4 * Sonne
 Durchmesser: 1,76 * Sonne



Die 7 Bahnelemente des elliptischen Orbits einer Komponente eines gebundenen Doppelsterns



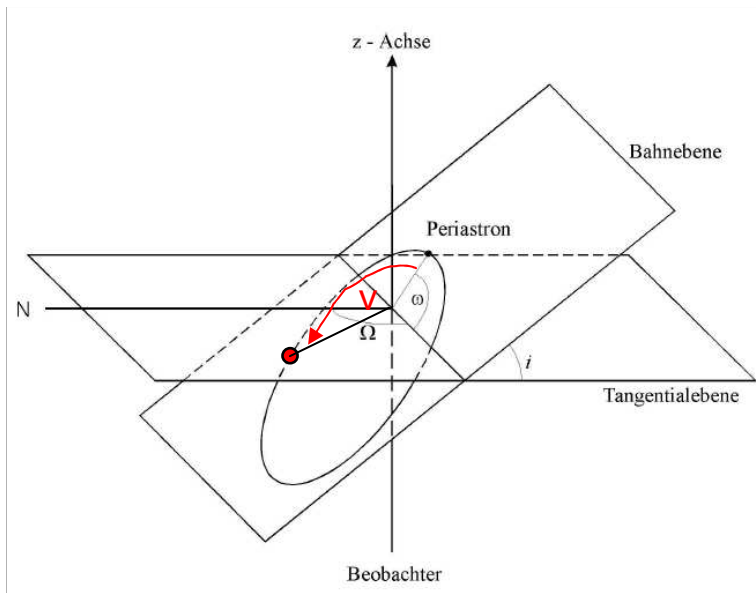
Die **Orientierung der Bahn** wird durch **drei geometrische Bahnelemente** eindeutig festgelegt:
i: Inklination (Winkel zwischen Bahnebene und Tangentialebene)
 ω : Periastronlänge (Winkel zwischen aufsteigendem Knoten und Periastron)
 Ω : Positionswinkel der Knotenlinie von Bahn- und Tangentialebene relativ zum Himmelsnordpol.

Um den **Ort einer Komponente** zu einem **gegebenen Zeitpunkt** berechnen zu können ist noch zusätzlich die Kenntnis der **vier dynamischen Bahnelemente** erforderlich:

- P**: Bahnperiode
- e**: Numerische Exzentrizität der Bahnellipse
- To**: Zeitpunkt eines Periastrondurchganges
- a**: Große Halbachse der Ellipse

Im Allgemeinen wird sich der Systemschwerpunkt (im gemeinsamen Brennpunkt der Ellipsen) mit einer **Systemgeschwindigkeit γ** relativ zur Sonne bewegen (im helio- oder baryzentrischen System).





Die **wahre Anomalie ν** des Körpers ist die Winkelkoordinate, welche den **zeitlich variablen Ort des Sterns beschreibt**, gemessen vom Periastron aus (Zählrichtung entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn). ν ist also eine Funktion der Zeit : $\nu(t)$.

Die **Bahn des Körpers** kann nun projiziert werden

1. auf die Tangentialebene (x,y-Ebene, Himmelskugel) -> **Astrometrisch beobachtbare Bahn**
2. auf die Sichtlinie des Beobachters (z-Achse) -> **Radialgeschwindigkeit, spektroskopisch beobachtbare „Bahn“.**

Beide Beobachtungsmethoden sind komplementär und lassen zusammen im Prinzip die Bestimmung der absoluten räumlichen Bahn zu.

Die mathematische Behandlung ergibt die folgende grundlegende Beziehung für die spektroskopisch meßbare **Radialgeschwindigkeit v_r**

$$v_r = \gamma + K (e \cos \omega + \cos (\omega + \nu))$$

$$K = (2 \pi / P) a \sin i / (1-e^2)^{1/2}$$

= halbe Amplitude der v_r -Kurve

mit

P	Periode
a	große Halbachse der Ellipse
i	Inklinationswinkel
e	Exzentrizität

Die einzige zeitabhängige Größe ist ν , alles andere sind Konstanten (Bahnelemente).

Die spektroskopischen Messungen ergeben die Radialgeschwindigkeiten $v_r(t)$. Um diese an die nebenstehende Formel anzukoppeln, muß die Beziehung zwischen der wahren Anomalie und dem zugehörigen Zeitpunkt gefunden werden. Das Problem hat Kepler durch Einführung der exzentrischen Anomalie E gelöst:

$$\tan (E / 2) = \{(1 - e) / (1 + e)\}^{1/2} \tan (\nu / 2)$$

$$E - e \sin E = (2 \pi / P) (t - T_0)$$

ν kann bei Kenntnis von E, P und T_0 für jeden Zeitpunkt t berechnet werden, und damit bei Kenntnis von γ , K, ω auch $v_r(t)$.

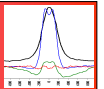
Wegen dem transzendenten Argument

E - e sin E ist keine direkte Berechnung möglich. Die Konstanten müssen deshalb an die Meßdaten gefittet werden.



Teil I:

Messung der Radialgeschwindigkeiten mit dem Spaltspektrographen



Apparative Voraussetzungen

erforderliches Auflösungsvermögen des Spektrographen
Kalibriergenauigkeit

Beispiel:

$K = 50 \text{ km/s}$. Dann sollte der Fehler der Messung $< 10\%$ der Amplitude sein, also etwa $\leq 5 \text{ km/s}$. Bei 6500 \AA muß dann die Bestimmung des Linienminimums auf $5 \text{ km/s} / 300000 \text{ km/s} * 6500 \text{ \AA} \approx 0,1 \text{ \AA}$ genau erfolgen.

- Die Kalibrierung muss genauer wie auf $0,1 \text{ \AA}$ erfolgen.
- Die Ausmessung der Linienminima erfolgt durch fitten der Linien als Gaußprofil. Dafür sollte die Linie mit ≥ 5 Pixeln erfasst sein.
- Bei Linienbreiten um 1 bis 2 \AA sollte dann die Dispersion $\leq 0,2$ bis $0,4 \text{ \AA/Pix}$ sein.

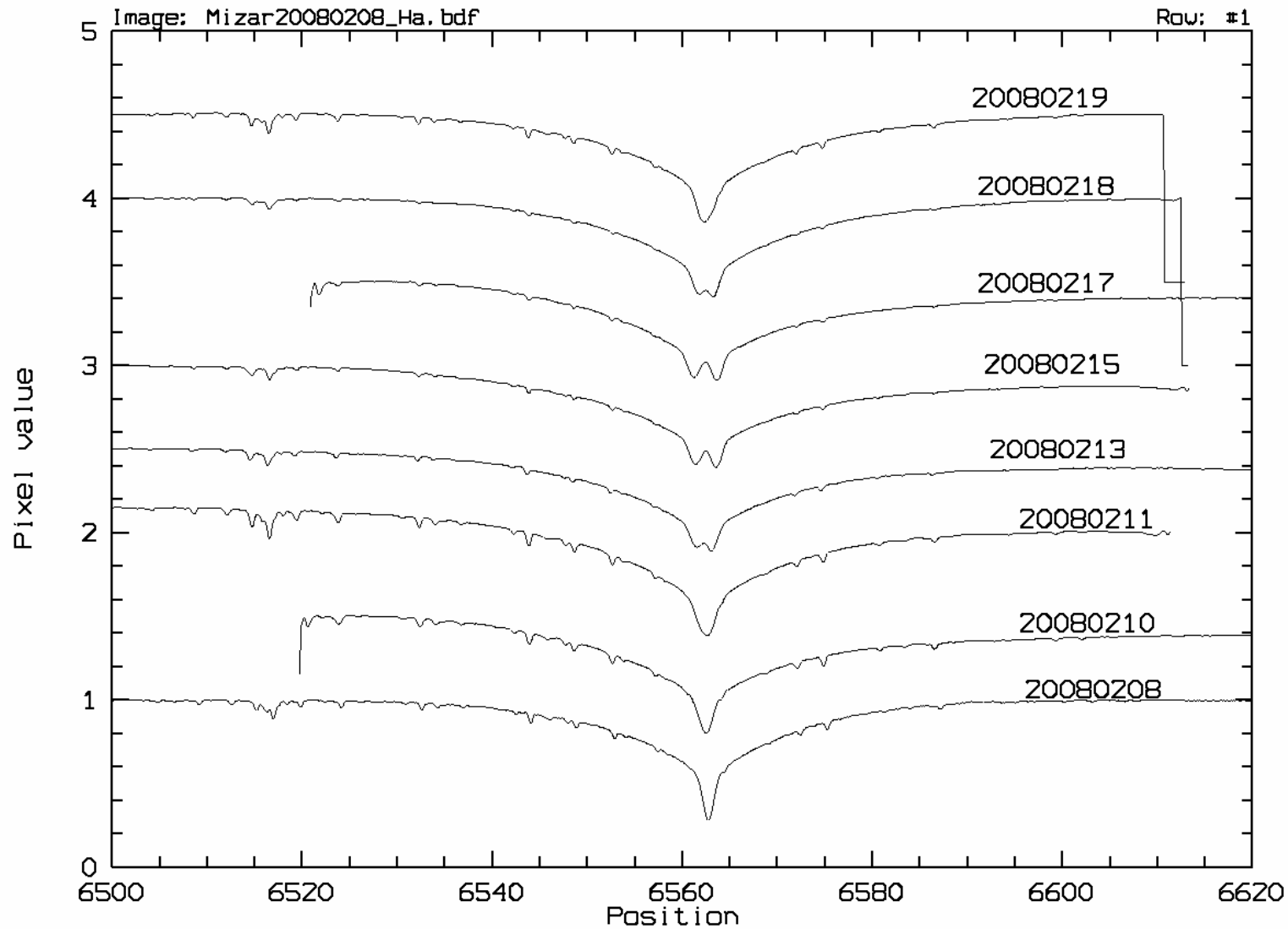
Meine Messungen wurden durchgeführt mit:

- Dispersion = $0,117 \text{ \AA/Pixel}$ (bei $9 \times 9 \mu\text{m}^2$ Pixel)
- FWHM Spaltabbildung = $0,45 \text{ \AA} = 5 \text{ Pixel}$

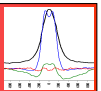
-> im Falle von schmalen Absorptionslinien wird nur die untere Hälfte gefittet (= 5 Pix). Diese Hälfte besitzt meist etwa Gaussprofil.



Spektrenserie von Mizar A, Februar 2008



gso-midas version: OFEEB date: Th, 03 Apr 2008 21:08 User: Lothar Schanne



Meßergebnisse an Mizar A (Radialgeschwindigkeiten)

1. Alle Spektren sind Spaltspektren, Lhires III (F/10, f=200mm), 2400 g/mm Gitter, Spaltbreite 40 µm,
2. Alle sind mit 3 bis 5 Neonlinien kalibriert (Polynom 2. Grades)
3. Dispersion bei 0,117 (H α) bzw. 0,121 (Si6347, Si6371) Å/Pix (9 µm x 9 µm)
4. Kontrolle der Kalibriergüte durch Gaussfitting einiger terrestrischer Linien -> Fehler < 5 km/s

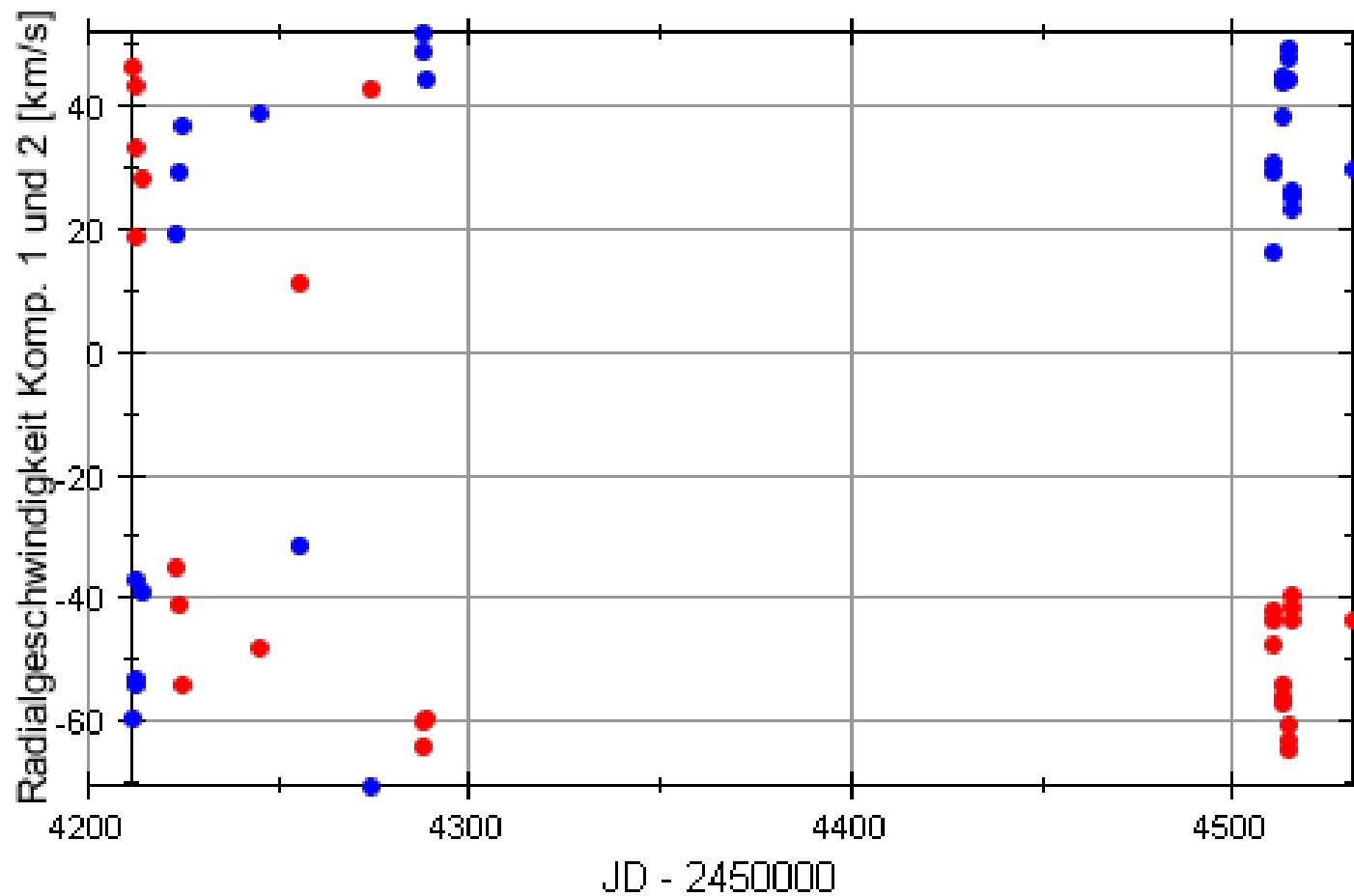
Beispiel: Meßwerte der H α -Linie

Observatorium		49°13,5'N	6°48,1'E	alle Messungen mit C1 4, Lhires III (2400 l/mm)										
Mizar	Rec	13h 24m 13,07s												
	Dec	+54°53' 14,3"												
Datum	JD	JD-2450000	Phase	Phase	blauseitiges	rotseitiges	halbe Differenz	Differenz zu	Laborwellenlänge	RV unkorrigiert		baryz. Korrektur	RV baryzentrisch korrigiert	
					Minimum	Minimum		blauseitiges	rotseitiges	Komponente 1	Komponente 2		Komponente	Komponente 2
					Å	Å	km/s	Å	Å	km/s	km/s	km/s	km/s	km/s
20.04.2007	2454211.37	4211.37	838.14	0.14	6561.80	6564.13	53.25	-1.05	1.28	58.42	-48.09	-11.53	46.89	-59.62
21.04.2007	2454212.36	4212.36	838.19	0.19	6561.93	6563.84	43.66	-0.92	0.99	45.16	-42.15	-11.73	33.43	-53.88
22.04.2007	2454213.37	4213.37	838.24	0.24	6562.26	6563.74	33.83	-0.59	0.89	40.59	-27.06	-11.93	28.66	-38.99
01.05.2007	2454222.39	4222.39	838.68	0.68	6562.39	6563.58	27.20	-0.46	0.73	-21.12	33.28	-13.53	-34.65	19.75
02.05.2007	2454223.39	4223.39	838.72	0.72	6562.26	6563.80	35.20	-0.59	0.95	-27.06	43.33	-13.69	-40.75	29.65
03.05.2007	2454224.39	4224.39	838.77	0.77	6561.98	6563.97	45.48	-0.87	1.12	-39.86	51.10	-13.84	-53.70	37.26
23.05.2007	2454244.40	4244.40	839.75	0.75	6562.16	6564.06	43.43	-0.69	1.21	-31.63	55.22	-16.05	-47.68	39.17
03.06.2007	2454255.40	4255.40	840.28	0.28	6562.53	6563.46	21.26	-0.32	0.61	27.79	-14.72	-16.48	11.31	-31.20
21.06.2007	2454273.40	4273.40	841.16	0.16	6561.66	6564.15	56.91	-1.19	1.30	59.33	-54.49	-15.98	43.35	-70.47
06.07.2007	2454288.45	4288.45	841.89	0.89	6561.87	6564.14	51.88	-0.98	1.29	-44.89	58.88	-14.46	-59.34	44.42
13.02.2008	2454510.45	4510.45	852.70	0.70	6561.68	6563.08	32.00	-1.17	0.23	-53.57	10.42	6.31	-47.26	16.73
15.02.2008	2454512.45	4512.45	852.80	0.80	6561.48	6563.57	47.77	-1.37	0.72	-62.72	32.82	5.79	-56.93	38.61
17.02.2008	2454514.45	4514.45	852.90	0.90	6561.36	6563.71	53.71	-1.49	0.86	-68.20	39.22	5.20	-63.00	44.42
18.02.2008	2454515.45	4515.45	852.94	0.94	6561.88	6563.26	31.54	-0.97	0.41	-44.43	18.65	4.92	-39.51	23.57
05.03.2008	2454531.40	4531.40	853.72	0.72	6561.90	6563.50	36.57	-0.95	0.65	-43.52	29.62	0.44	-43.08	30.06



Darstellung der Wertepaare $v_r(t)$ in einer Zeitseriengrafik

Die Auftragung der Radialgeschwindigkeiten $v_r(t)$ gegen die Zeit ist visuell schwierig zu interpretieren.



Auswertung unter Nutzung bekannter Orbitalelemente

Berechnung der theoretischen Radialgeschwindigkeitskurven mittels der Orbitalelemente von Fehrenbach (1961) innerhalb eines MuPAD Berechnungsblattes:

Orbitalelemente:

$K1 = 68.80 \text{ km/s}$

$K2 = 67.70 \text{ km/s}$

$\omega1 = 104.16^\circ$

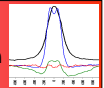
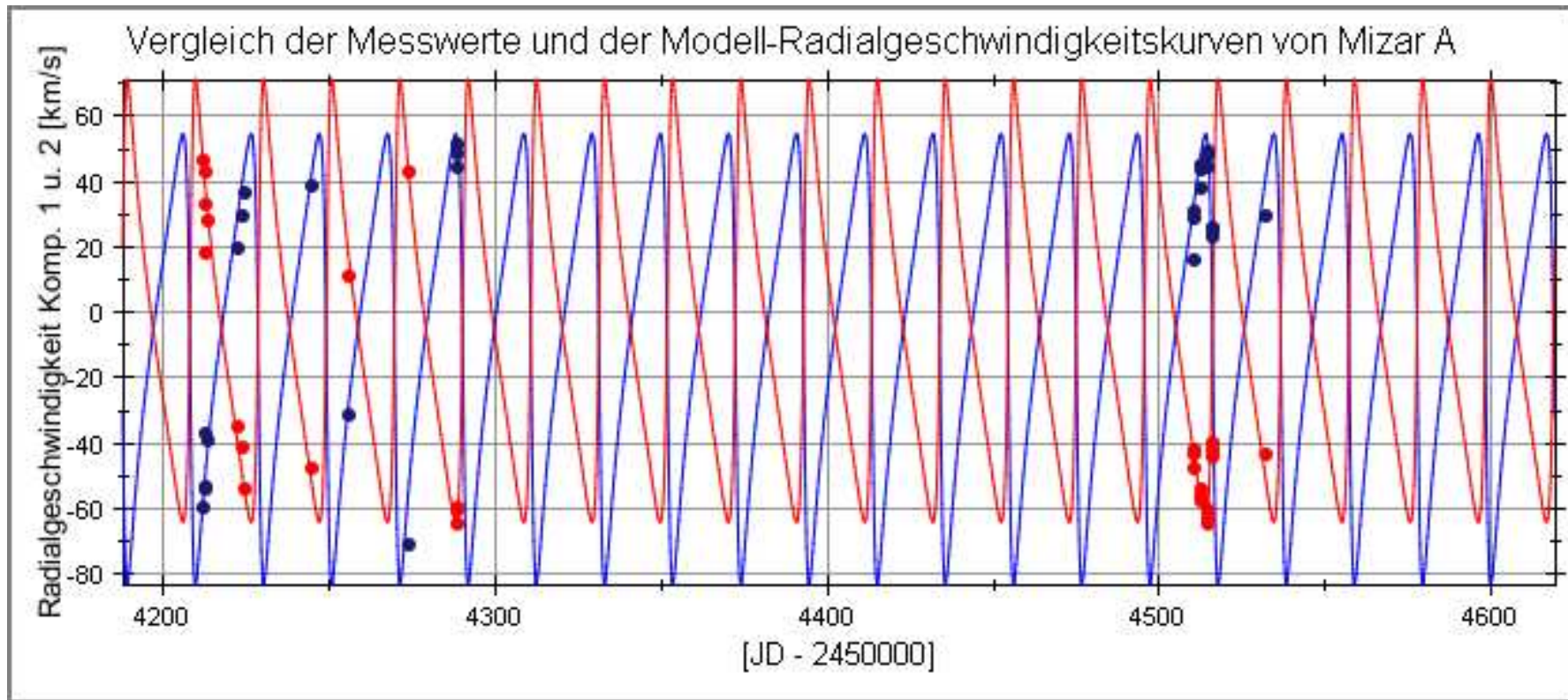
$T_0 = 2436997.212$

$P = 20.5386 \text{ d}$

$e = 0.537$

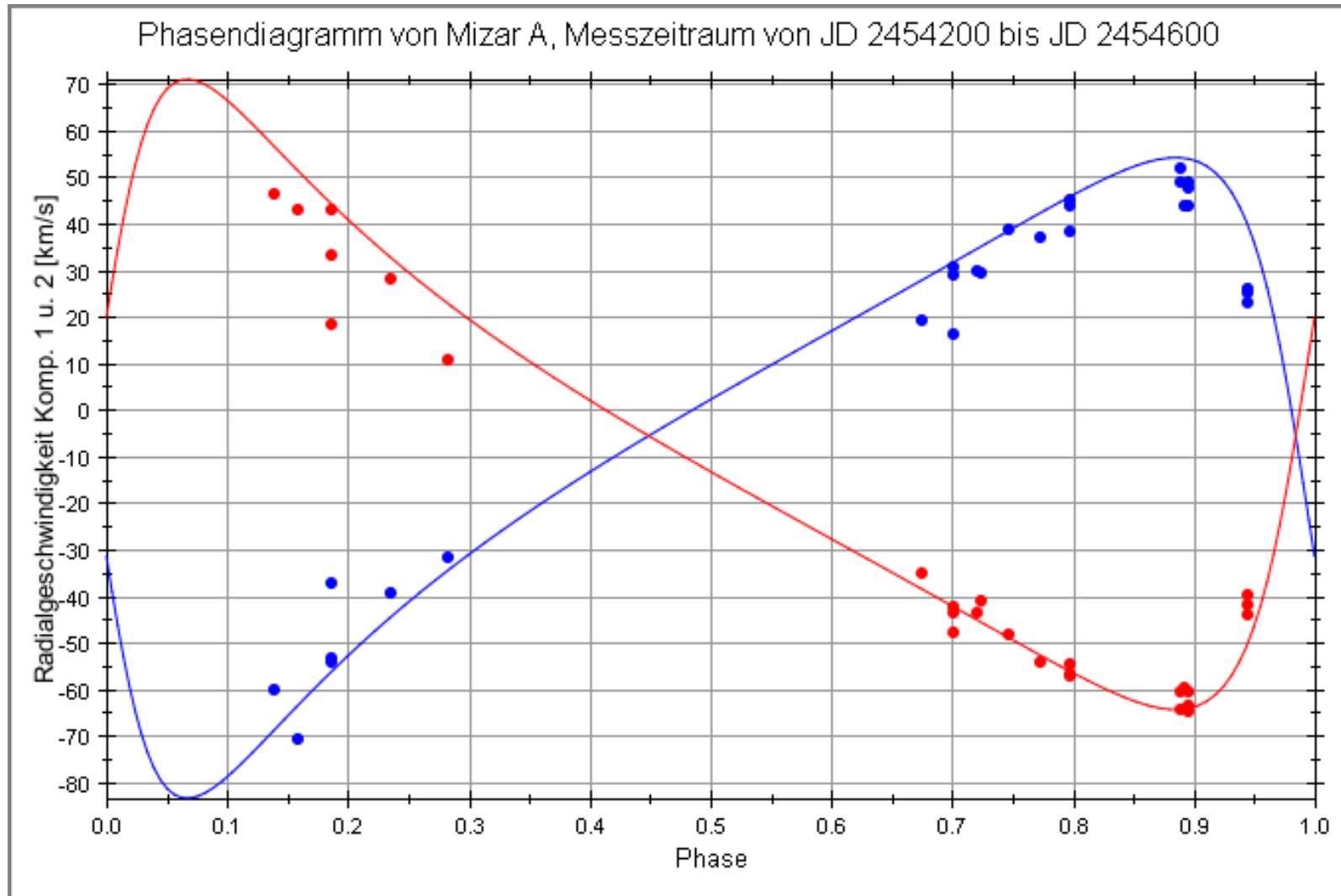
$\gamma = -5.64 \text{ km/s}$

- > $E - e \sin E = (2 \pi / P) (t - T_0)$
- > $\tan (E / 2) = \{(1 - e) / (1 + e)\}^{1/2} \tan (v / 2)$
- > $v_r = \gamma + K (e \cos \omega + \cos (\omega + v))$

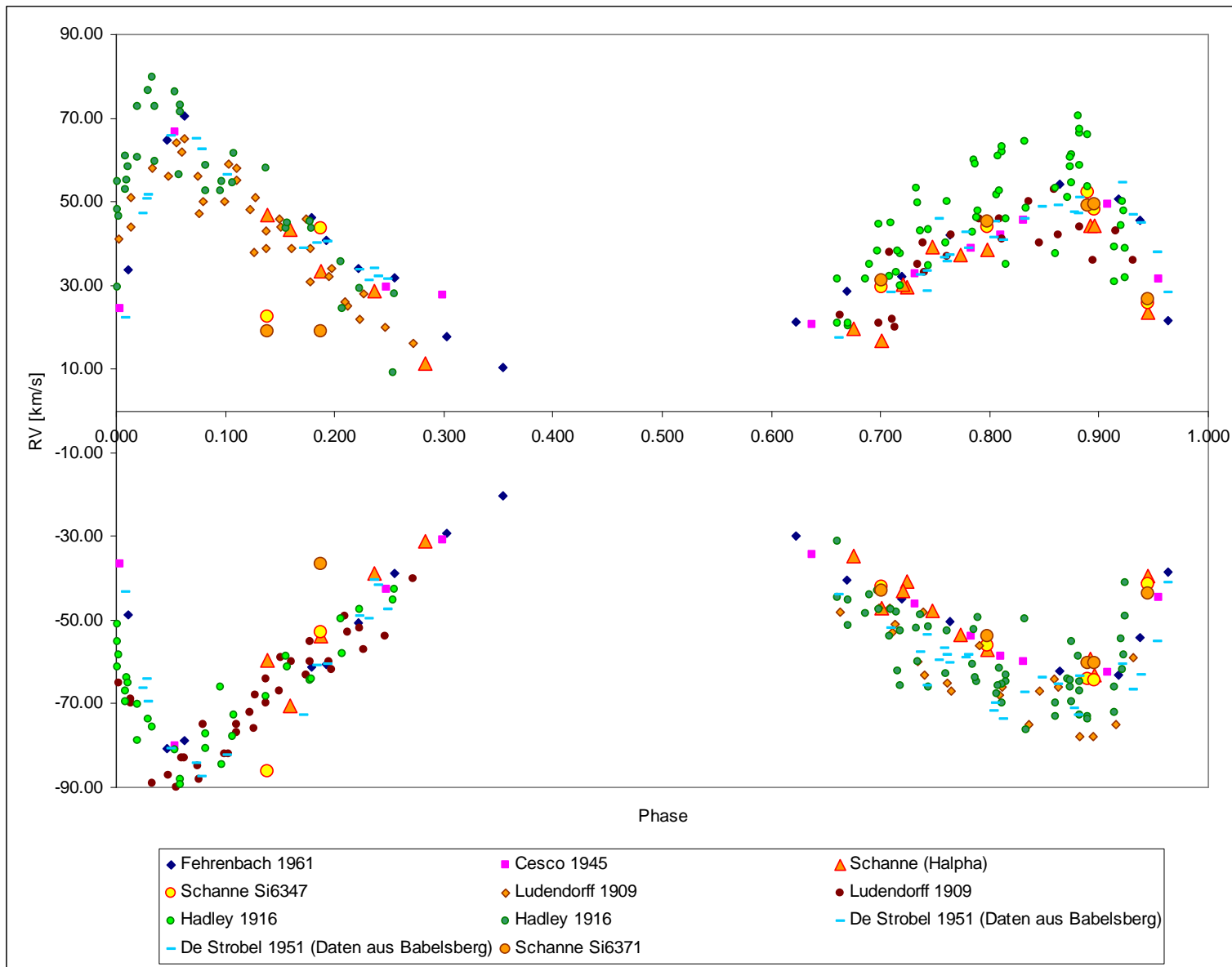


Auswertung unter Nutzung bekannter Orbitalelemente

Berechnung des theoretischen Phasendiagramms mittels der Orbitalelemente (Fehrenbach 1961) und Vergleich mit den Messwerten



Vergleich mit Messwerten aus der Literatur (Phasen berechnet mit den Orbitalelementen von Fehrenbach 1961)



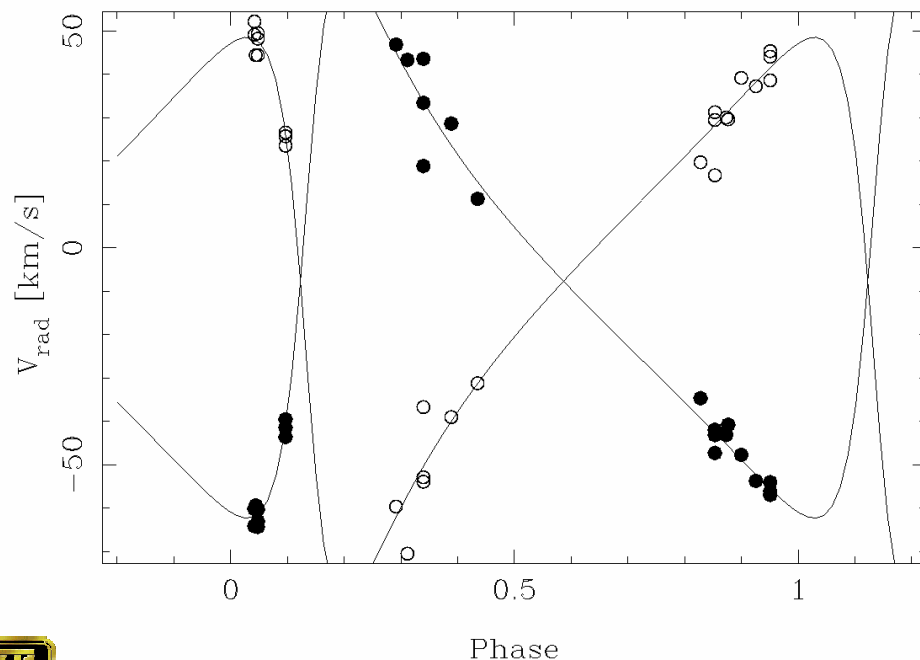
Bestimmung der Orbitalelemente mit „VELOCITY“

Wegen der transzendenten Funktion zwischen der wahren Anomalie v und der Beobachtungszeit t können aus den Messwerten $v_r(t)$ die 7 unabhängigen Parameter T_0 , P , e , K_1 , K_2 , ω_1 , γ nur durch iteratives Fitting ermittelt werden. Das kann durch „trial and error“ geschehen, mit geschätzten Anfangswerten und einer anschließenden Verbesserung der Anfangswerte mittels „least squares“ Methoden.

Ein professionelles unter Linux oder cygwin laufendes Programm von R. Wichmann namens **VELOCITY** (2001-2004 Rainer Wichmann, rwichmann@la-samhna.de, erweitert von O. Stahl) verwendet eine Kombination von SIMPLEX- und Levenberg-Marquardt-Algorithmen (Optimierung).

Die Daten werden über ein textfile eingelesen und interaktiv iterativ ausgewertet. Es gibt Möglichkeiten, den Verlauf der Iteration zu beeinflussen (Vorgabe von Schätzwerten oder Übergabe von Elementen, die nicht variiert werden). Wählbare plots lassen eine visuelle Beurteilung der Auswertergebnisse zu.

Die Auswertung der selbst gemessenen 54 Messwertpaare (v_r 's von H α und 2 Si-Linien) ergibt folgendes Ergebnis.



----- After Levenberg-Marquardt (3 iterations)

gamma = -8.34195 +/- 0.389286
K1 = 64.2405 +/- 0.869225
e = 0.54758 +/- 0.0303132
omega = 1.85421 +/- 0.0532902
P = 20.5484 +/- 0.00535743
T = 2.763 +/- 0.0935053
K1/K2 = 1.04607 +/- 0.0185248
status = success

RMS (Primary) = 5.339283
RMS (Secondary) = 4.635527
RMS (Total) = 4.999803

CHI^2 = 259.979462 (data points: 54)



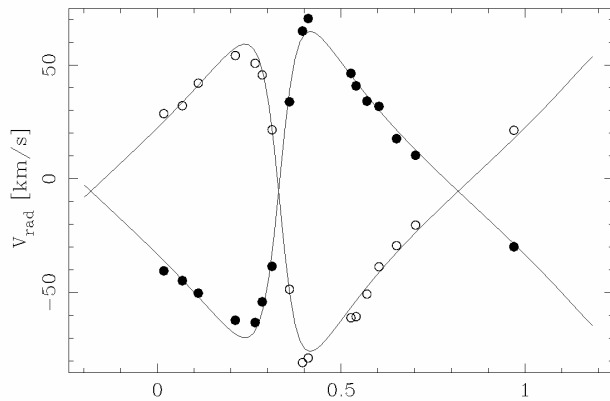
Auswertung mit „VELOCITY“

Vergleich der Bahnelemente aus VELOCITY mit Literaturdaten

BAHNELEMENT	AUSWERTUNG DER EIGENEN MESSUNGEN (JD 2454211.37 BIS 2454531.4)	FEHRENBACH 1961	CESCO 1946	HADLEY 1912
Periode P [d]	20.5484 +/- 0.0054	20,53860	20,53860 ± 0,00003	
Systemgeschwindigkeit γ [km/s]	-8.34195 +/- 0.389	-5,64 ±0,15	-6,39 ± 0,41	-7,22
K_1 [km/s]	64.2405 +/- 0.869	68,80 ± 0,79	65,33 ± 0,88	71,65 ± ,69
K_2 [km/s]	61.41	67,70 ± 0,91	66,99 ± 0,88	69,21 ± 0,56
e	0.54758 +/- 0.0303	0,537 ± 0,04	0,541 ± 0,006	0,53248 ± 0,00530
ω_1 [°]	106.24 +/- 3.05	104,16 ± 1,15	103,29 ± 1,13	105°35',9 ± 1'33',8
T [JD]	2454002.763 +/- 0.0935	2436997,212 ± 0,022	2431636,591 ±0,032	



Einbeziehung von Literatur-Meßdaten zur Verlängerung der Zeitabdeckung



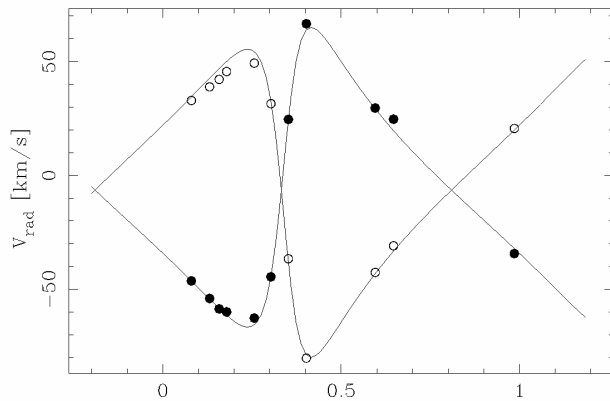
Fehrenbach Daten 1960

----- After Levenberg-Marquardt (3 iterations)

$\gamma = -5.46265 \pm 0.281079$
 $K1 = 67.5534 \pm 0.386272$
 $e = 0.535571 \pm 0.0535044$
 $\omega = 1.65019 \pm 0.0145788$
 $P = 0.205386 \pm 0.000212084$
 $T = 6.64118 \pm 0.000497458$
 $K1/K2 = 1.00265 \pm 0.00967853$
 status = cannot reach the specified tolerance in X

RMS (Primary) = 3.975499
 RMS (Secondary) = 3.668454
 RMS (Total) = 3.825059

CHI² = 156.064758 (data points: 34)



Cesco Daten 1945

----- After Levenberg-Marquardt (2 iterations)

$\gamma = -6.40493 \pm 0.518951$
 $K1 = 67.6443 \pm 1.4073$
 $e = 0.537181 \pm 0.0497562$
 $\omega = 1.72973 \pm 0.0266143$
 $P = 0.205386 \pm 0.000201036$
 $T = 7.05351 \pm 0.00123416$
 $K1/K2 = 1.02772 \pm 0.0202078$
 status = cannot reach the specified tolerance in X

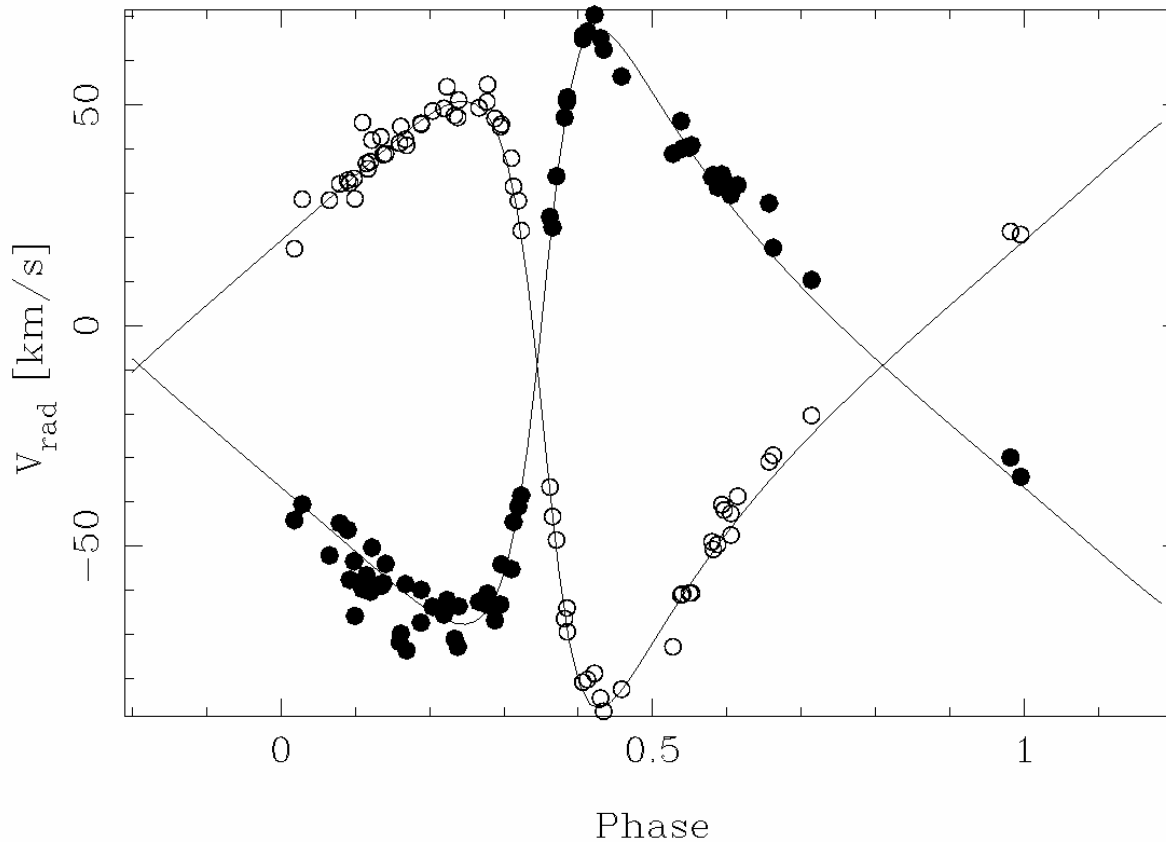
RMS (Primary) = 3.221385
 RMS (Secondary) = 2.461601
 RMS (Total) = 2.866775

CHI² = 54.789333 (data points: 22)



Einbeziehung von Literatur-Meßdaten zur Verlängerung der Zeitabdeckung

Zeiteinheit skaliert
auf 100 Tage



----- After Levenberg-Marquardt (1 iterations)

$\gamma = -9.0001 \pm 0.067058$
 $K1 = 68.7999 \pm 0.105318$
 $e = 0.537 \pm 0.016788$
 $\omega = 1.815 \pm 0.00176974$
 $P = 0.205385 \pm 1.11445e-05$
 $T = 266.253 \pm 0.0185761$
 $K1/K2 = 1.02005 \pm 0.00283669$
status = success

RMS (Primary) = 3.534932
RMS (Secondary) = 4.908366
RMS (Total) = 4.277137

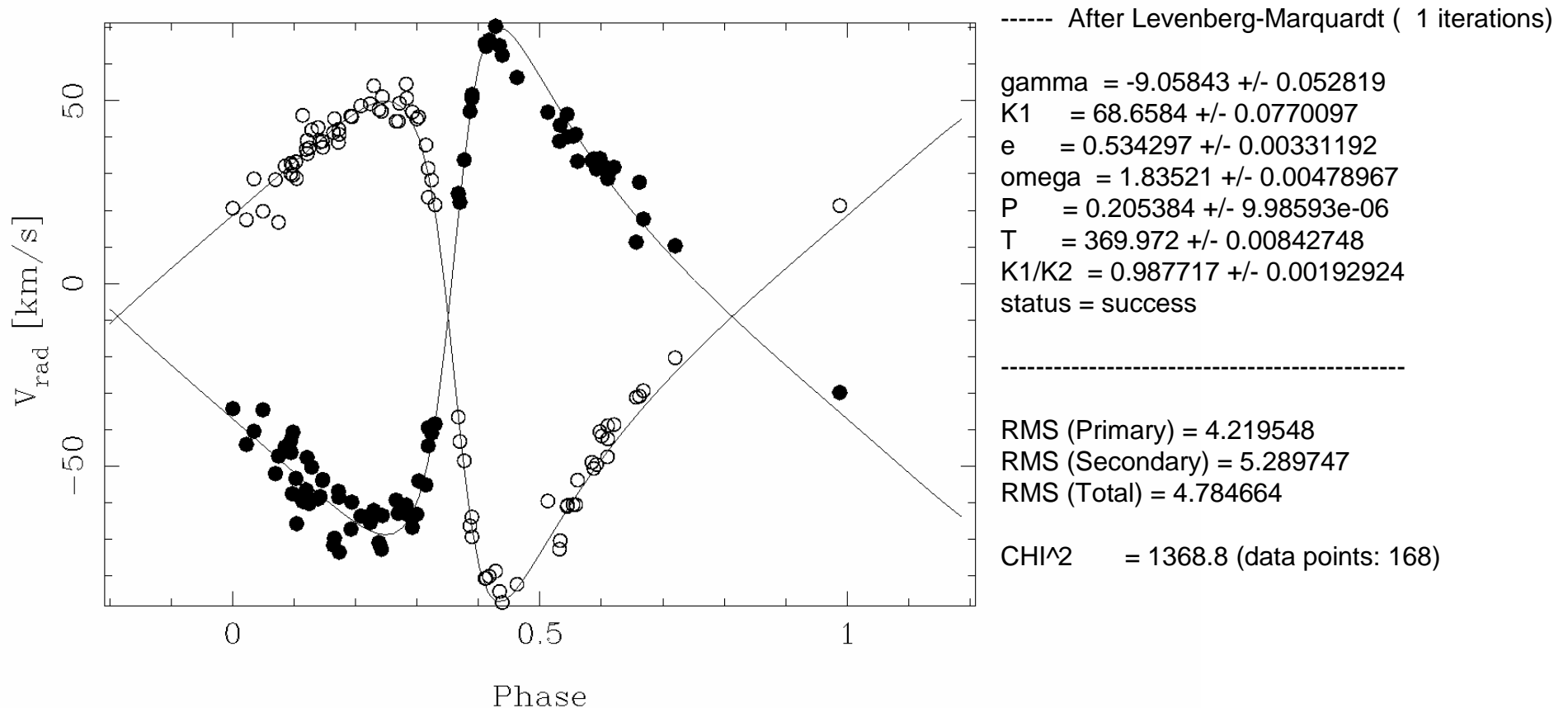
CHI² = 1120.682739 (data points: 138)

Daten 1931 bis 1960, de Strobel, Cesco, Fehrenbach



Einbeziehung von Literatur-Meßdaten zur Verlängerung der Zeitabdeckung

Zeiteinheit skaliert
auf 100 Tage

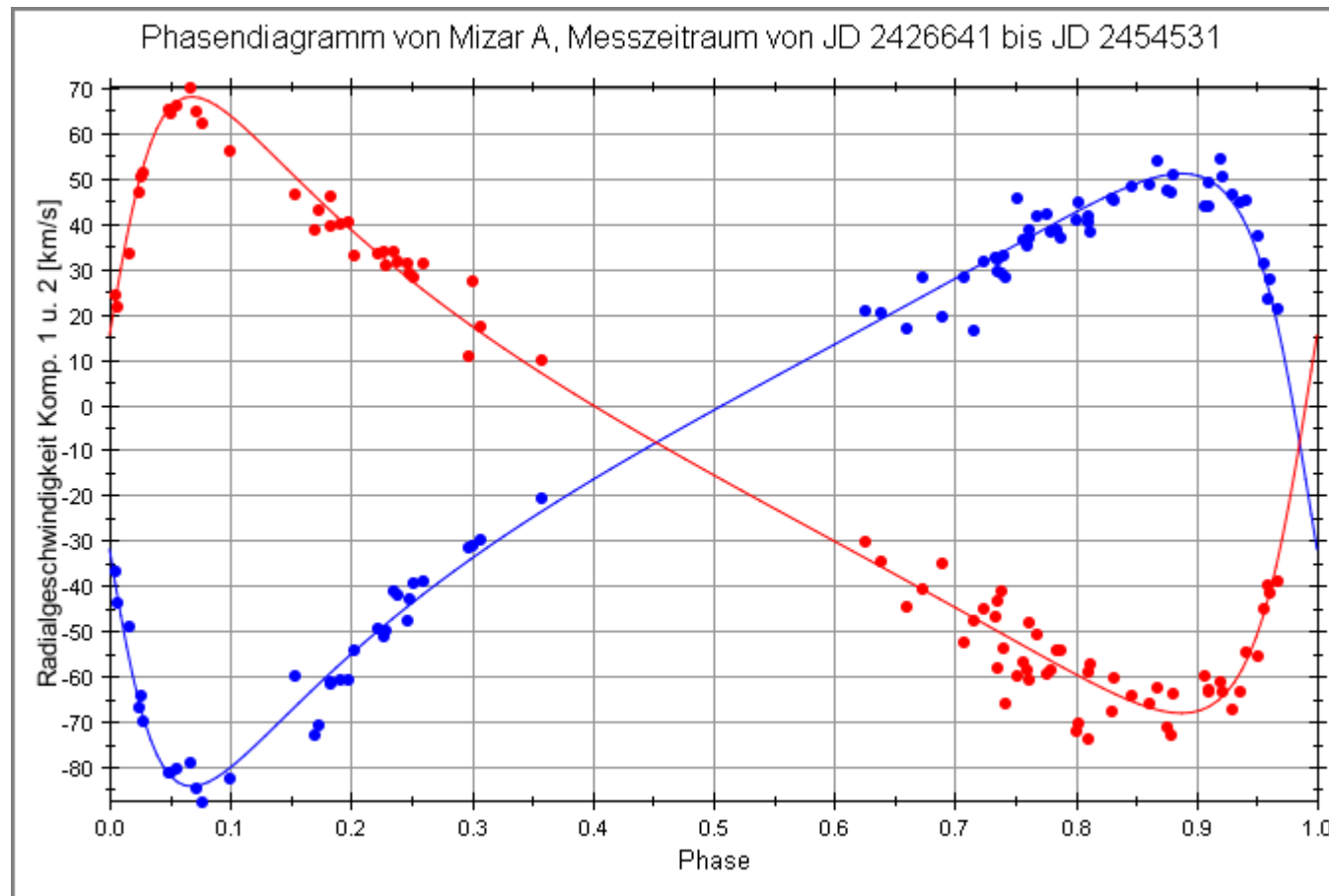


Daten de Strobel 1951, Cesco 1945, Fehrenbach 1960, Schanne 2007/2008 (nur H α) = Datensätze 1931 bis 2008



Auswertung der Daten durch systematische Variation der Bahnelemente und Minimierung der Residuenquadratsumme χ^2 der beiden Komponenten

Für gewählte Sätze der Bahnelemente werden die Radialgeschwindigkeitskurven (Phasen) berechnet und die Differenzen zwischen den Modellkurven und den Messwerten gebildet (Residuen). Datensatz 1931 bis 2008. Die Summe ihrer Quadrate wird durch (langwierige) systematische Variation der Bahnelemente minimiert (Suche des Minimums der Summe beider χ^2 im 7D-Elementerraum).



Auswertung der Daten durch systematische Variation der Bahnelemente und Minimierung der Residuenquadratsumme χ^2 der beiden Komponenten

Um ein Gefühl für die Genauigkeit der bestimmten Bahnelemente zu bekommen, werden die partiellen χ^2 Minima der beiden Komponenten und damit ihre Bahnelementsätze getrennt gesucht. Der Mittelwert wird als Ergebnis gezählt, die halbe Differenz als (zu optimistischer) Vertrauensbereich.

BAHNELEMENT	EIGENE AUSWERTUNG ELEMENTE-VARIATION MITTEL (DATEN AUS 1931 BIS 2008)	EIGENE AUSWERTUNG ELEMENTE-VARIATION KOMPONENTE 1 (DATEN AUS 1931 BIS 2008)	EIGENE AUSWERTUNG ELEMENTE-VARIATION KOMPONENTE 2 (DATEN AUS 1931 BIS 2008)
Periode P [d]	20,538350 +/- 0,000015	0,538365	0,838335
Systemgeschwindigkeit γ [km/s]	-8,45 +/-0,20	-8,65	-8,25
K_1 [km/s]	68,1	68,1	
K_2 [km/s]	67,7		67,7
e	0,5375 +/- 0,008	0,545	0,530
ω_1 [°]	103,1 +/- 0,3	102,8	103,4
T [JD]	2426625,246 +/- 0,016	2426625,262	2426625,230



Ergebnis der Einbeziehung von Literatur-Meßdaten zur Verlängerung der Zeitabdeckung

In der Tabelle sind alle eigenen und Literaturergebnisse zum Vergleich zusammengefasst

BAHN-ELEMENT	EIGENE AUSWERTUNG ELEMENTE-VARIATION MITTEL (DATEN 1931 - 2008)	EIGENE AUSWERTUNG ELEMENTE-VARIATION KOMPONENTE 1 (DATEN 1931 - 2008)	EIGENE AUSWERTUNG ELEMENTE-VARIATION KOMPONENTE 2 (DATEN 1931 - 2008)	EIGENE AUSWERTUNG VELOCITY (DATEN 1931 BIS 2008)	HUMMEL 1998 (INTERFEROMETRISCH)	HADRAVA 2004 (KOREL)	FEHRENBACH 1961 (WERTE AUS 1960)	DE STROBEL 1951 (WERTE AUS 1931 - 1935)	CESCO 1946 (WERTE AUS 1945)	HADLEY (WERTE 1912-1913)
Periode P [d]	20,53835 +/- 0,000015	0,538365	0,838335	20,5384 +/-0,0001 ¹	20,53835 +/- 0,00005	20,53835 +/- 0,00001	20,53860	20,538387 +/- 0,000055	20,53860 ± 0,00003	
Systemgeschwindigkeit γ [km/s]	-8,45 +/-0,20	-8,65	-8,25	-9,058 +/- 0,052			-5,64 ±0,15	-8,50 +/- 0,68	-6,39 ± 0,41	-7,22
K_1 [km/s]	68,1 +/- 0,1	68,1		69,513	69,1	68,85 +/- 0,02	68,80 ± 0,79	68,02 +/- 0,44	65,33 0,88	71,65 ± 0,69
K_2 [km/s]	67,7 +/- 0,1		67,7	68,658 +/- 0,077	67,2	65,51 +/- 0,4	67,70 ± 0,91	68,21 +/- 0,44	66,99 ± 0,88	69,21 ± 0,56
e	0,5375 +/- 0,008	0,545	0,530	0,5342 +/- 0,0033	0,5354 +/- 0,0025	0,542 +/- 0,004	0,537 ± 0,04	0,536 +/- 0,003	0,541 ± 0,006	0,53248 ± 0,00530
ω_1 [°]	103,1 +/- 0,3	102,8	103,4	105,14 +/- 0,27	104,3 +/- 0,3	104,16 +/- 0,05	104,16 ± 1,15	102°61 +/- 0°78	103,29 ± 1,13	105°35'9 ± 1°33'8
T [JD]	2426625,246 +/- 0,016	2426625,262	2426625,230	2436997,2 +/- 0,84	2447637,07 +/- 0,02	2449114,81 +/- 0,06	2436997,212 ± 0,022	2431636,582 +/- 0,017	2431636,591 ± 0,032	

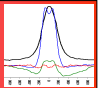
¹ Berechnet mit Peranso, FALC, identisches Ergebnis mit velocity

[1] Berechnet mit Peranso, FALC, identisches Ergebnis mit velocity



Teil II:

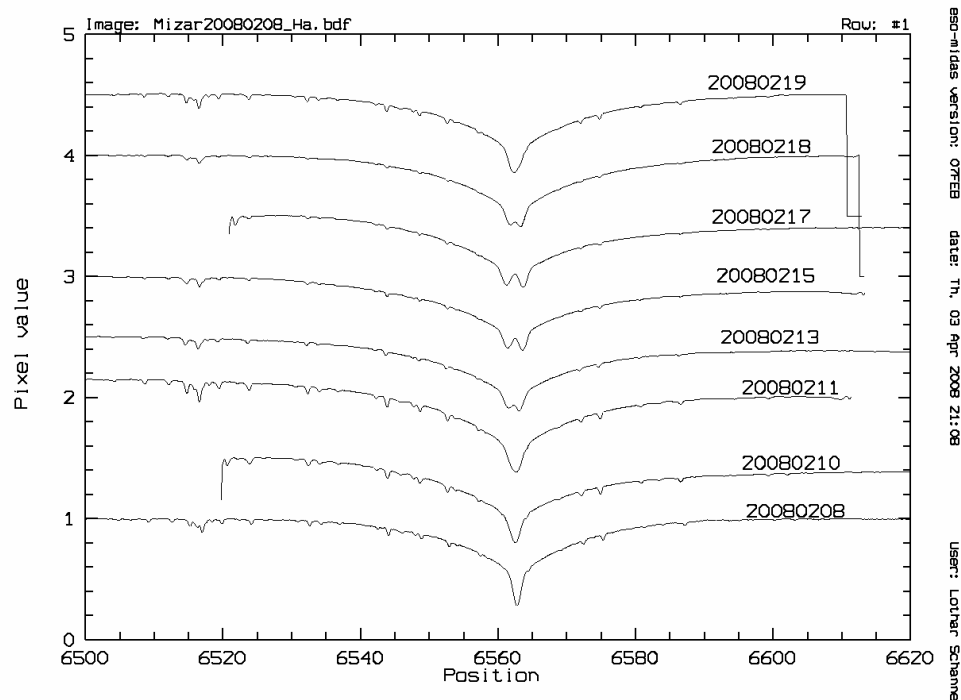
Messung der Radialgeschwindigkeiten mit dem spaltlosen Spektrographen



Lassen spaltlos gemessene Spektren die Bestimmung von Orbitalelementen spektroskopischer Doppelsterne zu?

Im Falle von spaltlosen Spektrographen steht keine Kalibrierlampe zur Verfügung.

Eine unabhängige Kalibrierung ist mit terrestrischen Linien möglich, die aber im optischen Wellenlängenbereich nur lückenhaft zur Verfügung stehen, beispielsweise im unmittelbaren Umfeld der H α -Linie.



Bei SB2-Doppelsternen sind mit dem spaltlosen Spektrographen die **Linien-Aufspaltungen** meßbar (Abstand der Linienminima). Diese enthalten ebenfalls Informationen über den Orbit der beteiligten Sterne. Sie sollten zumindest die Periode verraten – oder doch auch mehr ?

Welche Orbitalelemente können aus den Linienaufspaltungen entnommen werden?



Spaltlose Spektren: Mathematische Behandlung des Problems

Zur Ableitung nützliche Beziehungen:

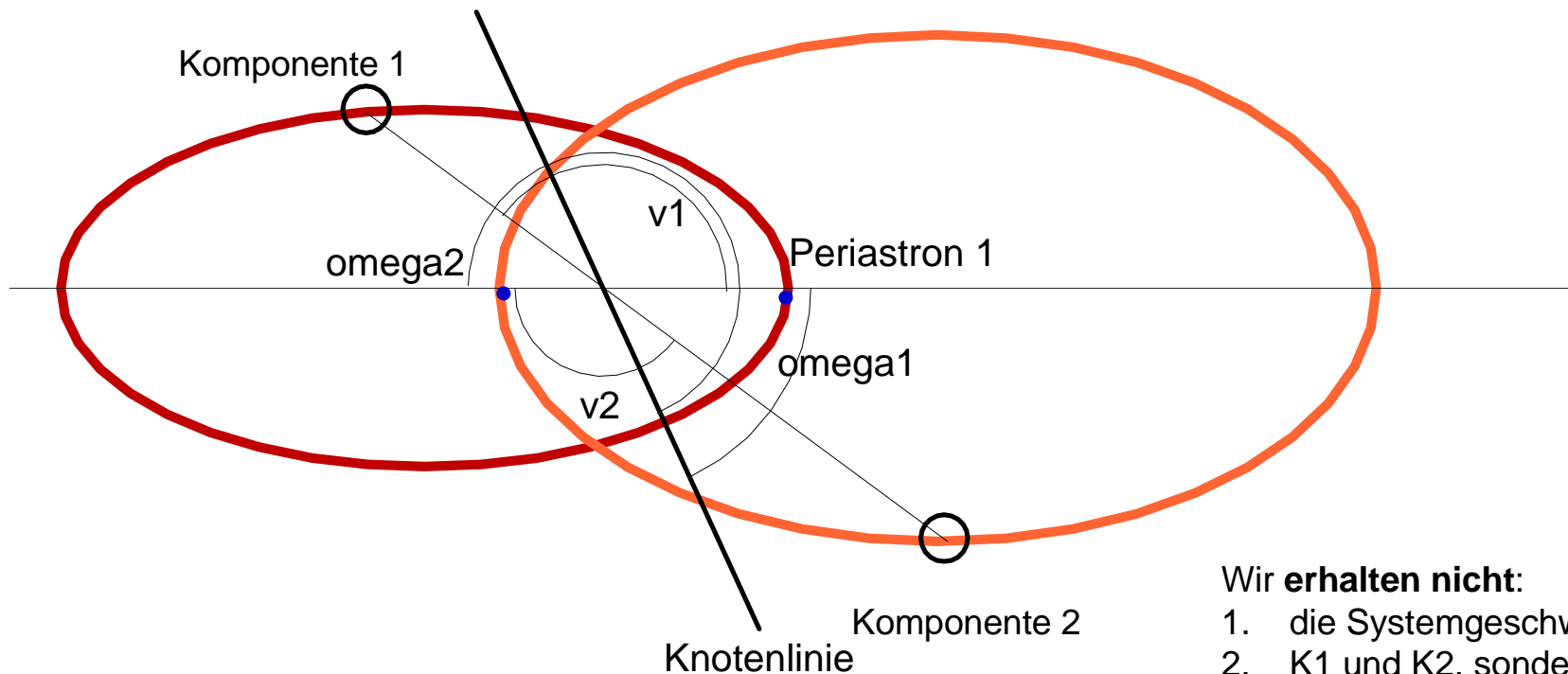
$v_1(t) = v_2(t)$ zu jedem beliebigen Zeitpunkt

$\omega_2 = \omega_1 + \pi$

$$vr_1 = \gamma + K_1 (e \cos \omega_1 + \cos (\omega_1 + v_1))$$

$$vr_2 = \gamma + K_2 (e \cos \omega_2 + \cos (\omega_2 + v_2))$$

$$vr_1 - vr_2 = \Delta vr = (K_1 + K_2) (e \cos \omega + \cos (\omega + v))$$



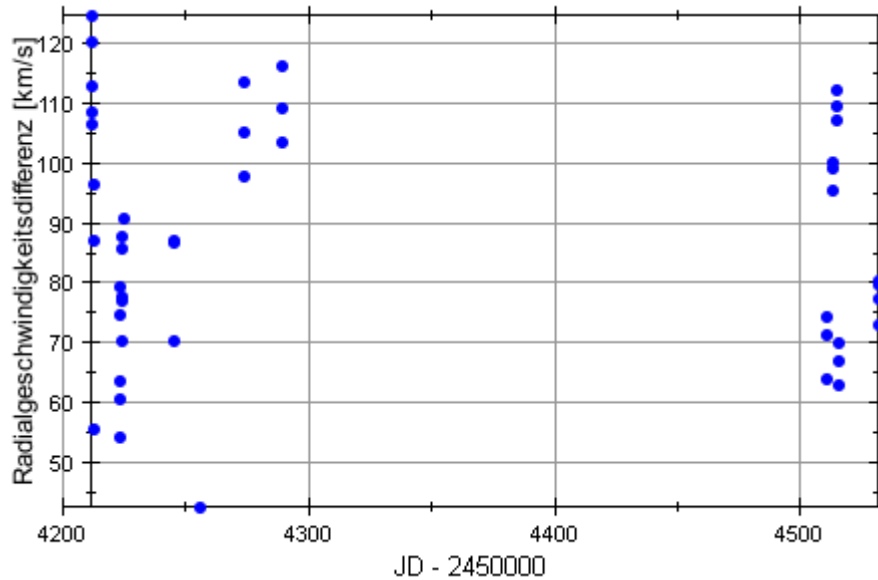
Wir **erhalten nicht**:

1. die Systemgeschwindigkeit γ
2. K_1 und K_2 , sondern $(K_1 + K_2)$

Wir **erhalten** :

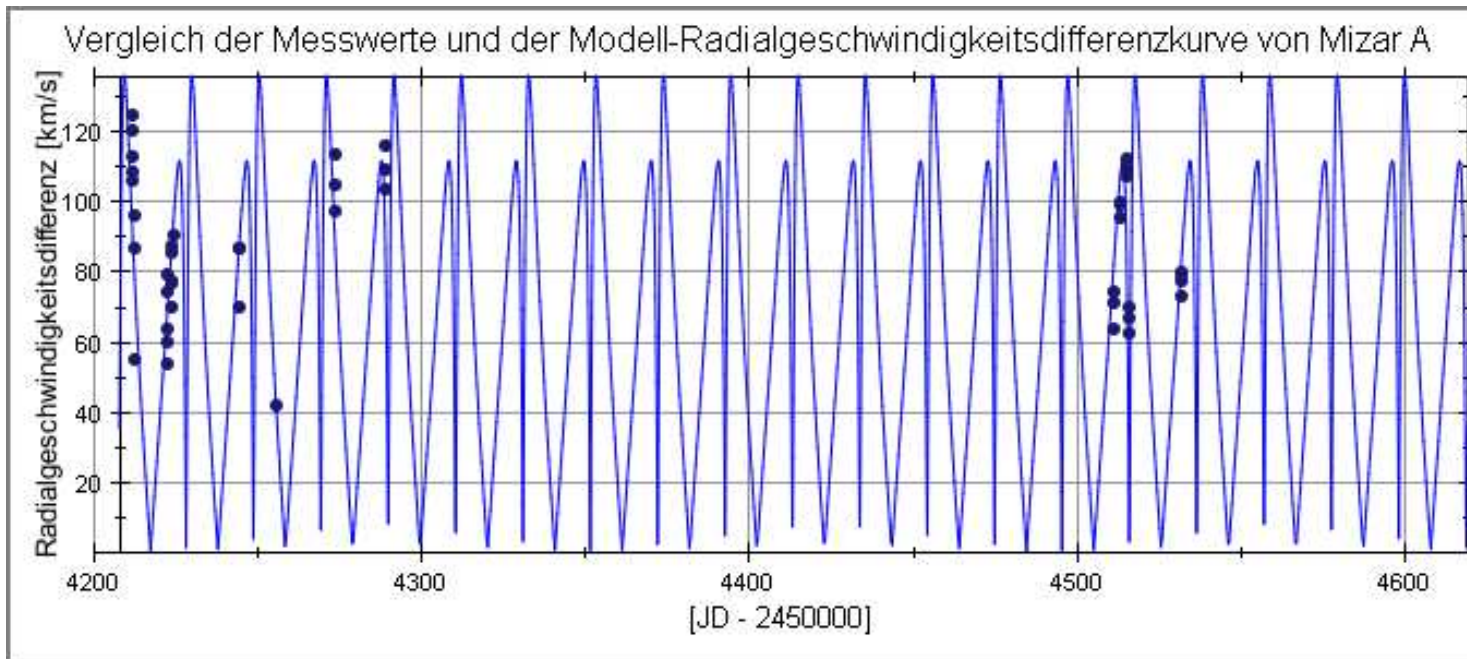
P, T_0, e, ω_1 und $\omega_2, (a_1 + a_2) \cdot \sin i$





Wenn wir in den Spektren nur die Aufspaltung der Linien als Wellenlängenabstand messen, ergeben sich die Beträge der Δv_r . Das Zeit- $|\Delta v_r|$ -Diagramm und das Zeit-Phasen-Diagramm der $|\Delta v_r|$ verläuft dann nur im positiven Geschwindigkeits-Bereich.

Beispiel: Eigene Messungen 2007 - 2008
Die Auftragung der Radialgeschwindigkeiten $|\Delta v_r|(t)$ gegen die Zeit ist (wie im Falle der absoluten $v_r(t)$) visuell schwierig zu interpretieren.



Der Vergleich der Meßwerte $|\Delta v_r|$ mit den aus den mit VELOCITY ermittelten Orbitalelementen berechneten Modellkurven ergibt eine befriedigende Übereinstimmung.



Kann man aus den Phasendiagrammen markante Größen direkt entnehmen?

Um die Frage zu beantworten müssen einige mathematische Betrachtungen durchgeführt werden.

In der Bahnfunktion $|\Delta v_r| (v_1)$

$$|v_{r1}-v_{r2}| = |\Delta v_r| = |(K_1+K_2) (e \cos \omega_1 + \cos (\omega_1 + v_1))|$$

ist nur der letzte Term zeitlich variabel.

Da $0 \leq e \leq 1$ und $-1 \leq \cos(\) \leq 1$ ist auch $-1 \leq e \cos \omega_1 \leq 1$.

$\Delta v_r = 0$ wenn $\cos (\omega_1 + v_1) = - e \cos \omega_1 = e \cos \omega_2 \gg \gg$ die Kurve hat zwei Nullstellen (Konjunktion)

wenn

$$(\omega_1 + v_1) = 0 \cdot \pi \quad \rightarrow \quad |\Delta v_r| = |(K_1+K_2) (e \cos \omega_1 + 1)| \quad \text{Maximum (A), Knoten}$$

$$(\omega_1 + v_1) = \frac{1}{2} \cdot \pi \quad \rightarrow \quad |\Delta v_r| = |(K_1+K_2) e \cos \omega_1|$$

$$(\omega_1 + v_1) = 1 \cdot \pi \quad \rightarrow \quad |\Delta v_r| = |(K_1+K_2) (e \cos \omega_1 - 1)| \quad \text{Maximum (B), Knoten}$$

$$(\omega_1 + v_1) = 1\frac{1}{2} \cdot \pi \quad \rightarrow \quad |\Delta v_r| = |(K_1+K_2) e \cos \omega_1|$$

$$\rightarrow \quad A + B = 2 (K_1 + K_2) \quad \rightarrow \quad K_1 + K_2 = (A + B) / 2$$

$$\rightarrow \quad A - B = 2 (K_1 + K_2) \cdot e \cos \omega_1$$

$$\rightarrow \quad (A-B)/(A+B) = e \cos \omega_1$$

Aus dem Diagramm ergibt sich

$$A \approx 135 \text{ km/s}$$

$$B \approx 112 \text{ km/s} \rightarrow (A+B)/2 = K_1 + K_2 = 123,5 \text{ km/s}$$

$$\rightarrow (A-B)/(A+B) = e \cos \omega_1 = 0,186$$

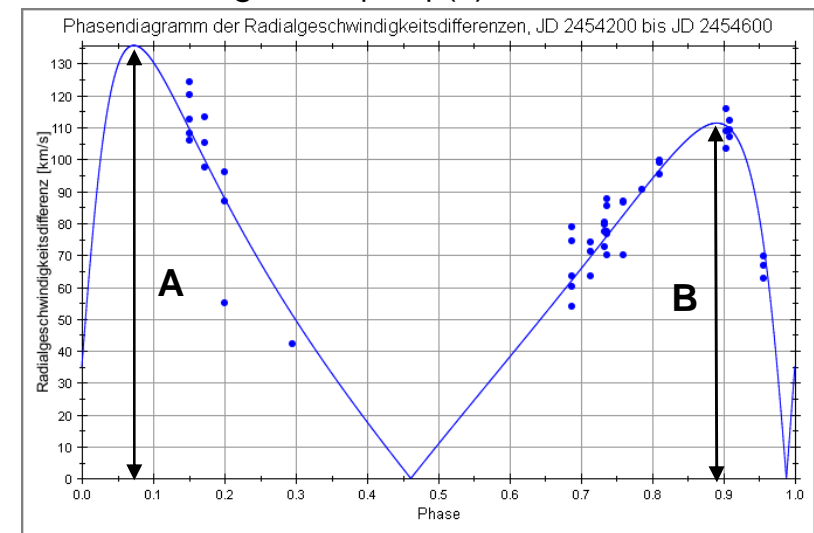
Die Bahnfunktion $|\Delta v_r| (v_1)$

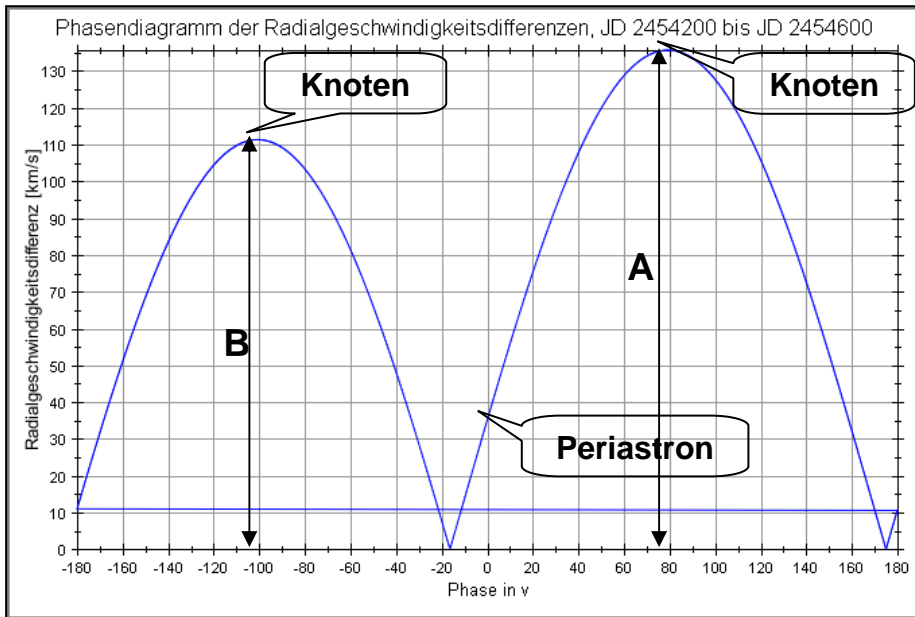
$$|v_{r1}-v_{r2}| = |\Delta v_r| = |(K_1+K_2) (e \cos \omega_1 + \cos (\omega_1 + v_1))|$$

kann jetzt auch dargestellt werden als

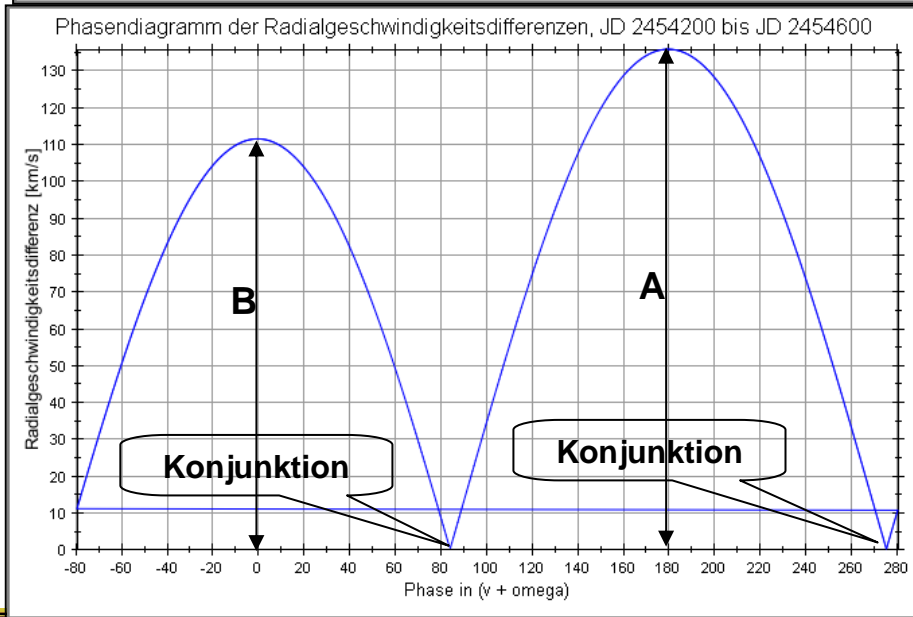
$$|v_{r1}-v_{r2}| = |\Delta v_r| = \frac{1}{2} |A - B + (A+B) \cdot \cos (\omega_1 + v_1)|$$

Phasendiagramm $|\Delta v_r| (v)$, Daten 2007-2008



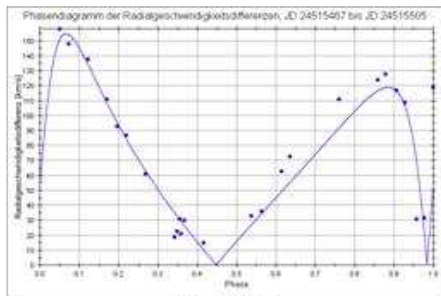


Phasendiagramm $|\Delta v_r|(\nu)$

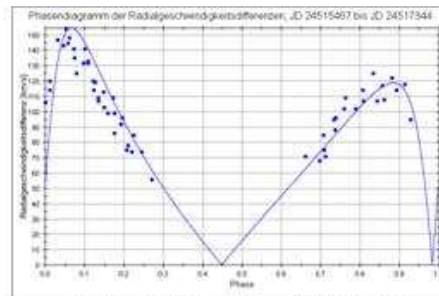


Phasendiagramm $|\Delta v_r|(\omega_1 + \nu)$

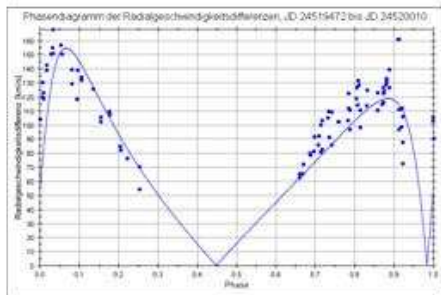




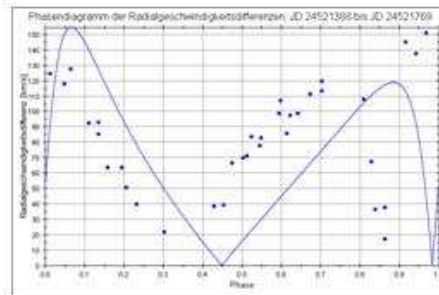
Vogel 1901



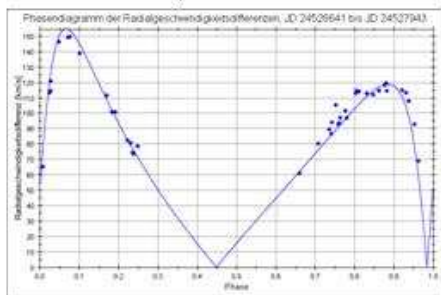
Ludendorff, Ehrenberg 1901 bis 1906



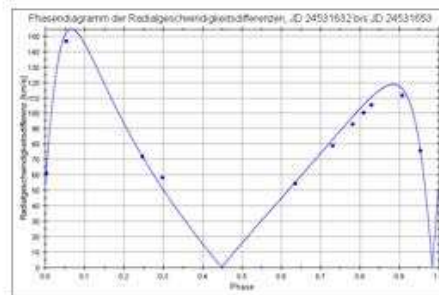
Hadley 1912 und 1913



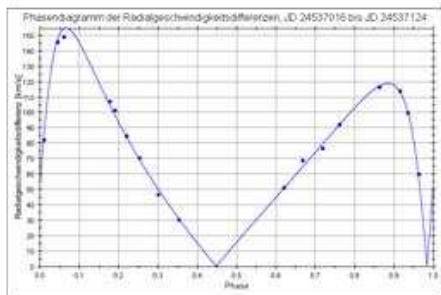
Hnatek 1917 und 1918



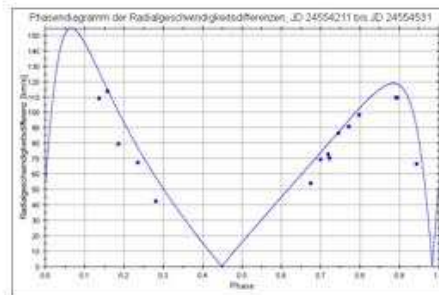
de Strobel, 1931 bis 1935



Cesco 1945



Fehrenbach 1960



Schanne 2007 und 2008

Hier sind die mir bekannten Messwerte der Beträge der Linienaufspaltungen verschiedener Autoren zusammengefaßt und den Modellkurven, berechnet aus den Fehrenbach-Orbital-Elementen, gegenübergestellt.

Bis auf die Werte vom Hnatek (1917,1918) stimmen Modellkurve und Messwerte im Rahmen der Messwerte-Streuung überein.

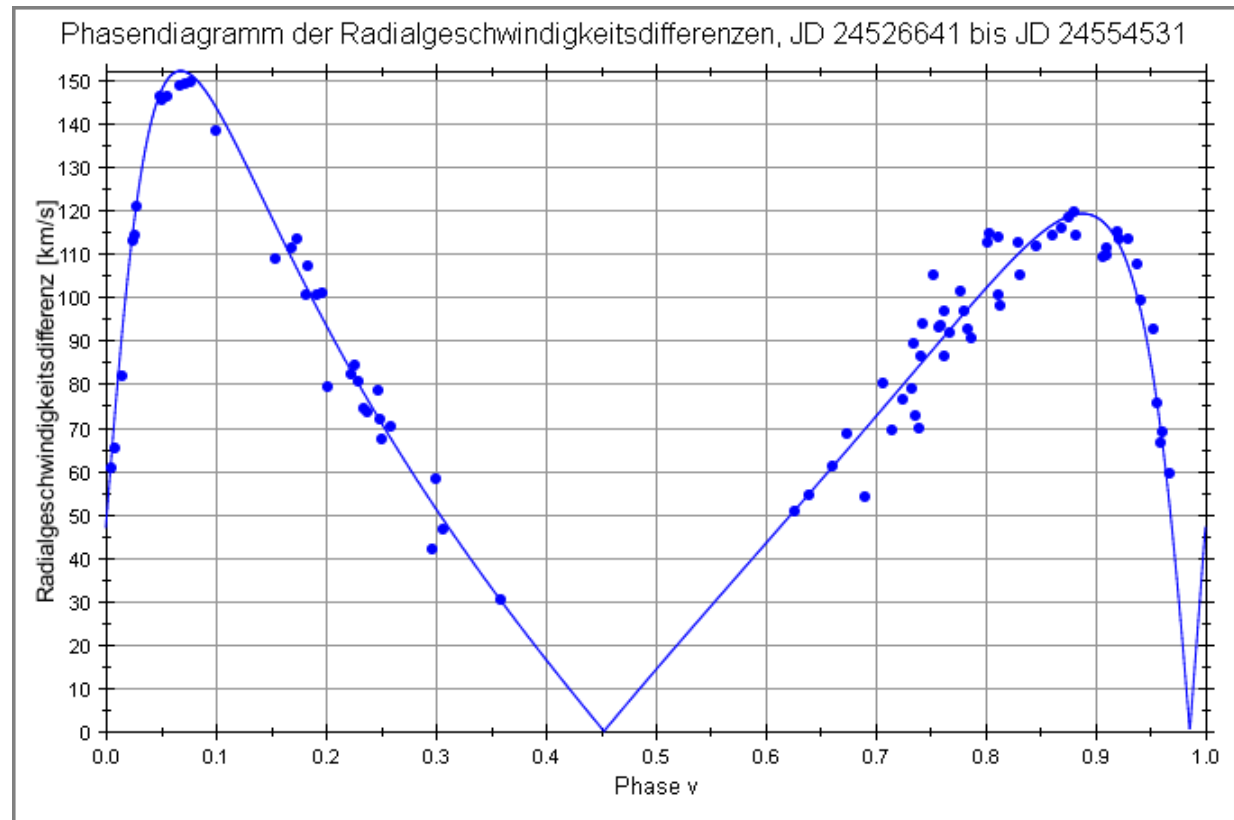


Für die Bestimmung der Orbitalelemente aus den $|\Delta v_r|$ steht meines Wissens im Moment kein Optimierungsprogramm wie VELOCITY zur Verfügung.

Die klassische „least squares“-Methode lässt sich natürlich immer anwenden:

Die Orbitalelemente wurden durch systematische partielle Variation innerhalb eines vom Autor in MuPAD geschriebenen Arbeitsblattes bestimmt, in dem die Summe der Residuenquadrate aus den Messwerten und der Modellkurve minimiert wurde. Das Beispiel zeigt die optimierte Kurve der Linienaufspaltungen für den Datensatz 1931 bis 2008.

BAHNELEMENT	EIGENE AUSWERTUNG ELEMENTE-VARIATION LINIENAUFSPALTUNGEN (DATEN AUS 1931 BIS 2008)	EIGENE AUSWERTUNG ELEMENTE-VARIATION MITTEL (DATEN AUS 1931 BIS 2008)
Periode P [d]	20,538354	20,538350 +/- 0,000015
Systemgeschwindigkeit γ [km/s]	-	-8,45 +/- 0,20
K_1 [km/s]	$K_1 + K_2 = 135,6$	68,1
K_2 [km/s]		67,7
e	0,5384	0,5375 +/- 0,008
ω_1 [°]	103,0	103,1 +/- 0,3
T [JD]	2426625,243	2426625,246 +/- 0,016

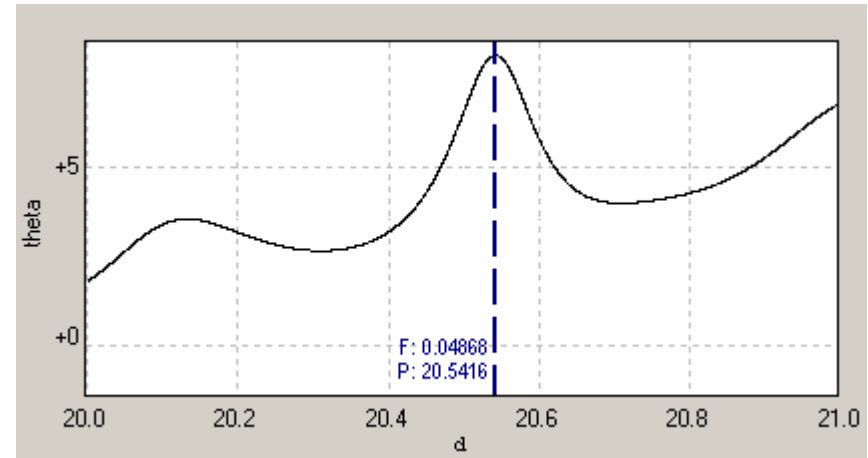


Peiodenbestimmung aus den Linienaufspaltungen (Differenzenbeträge)

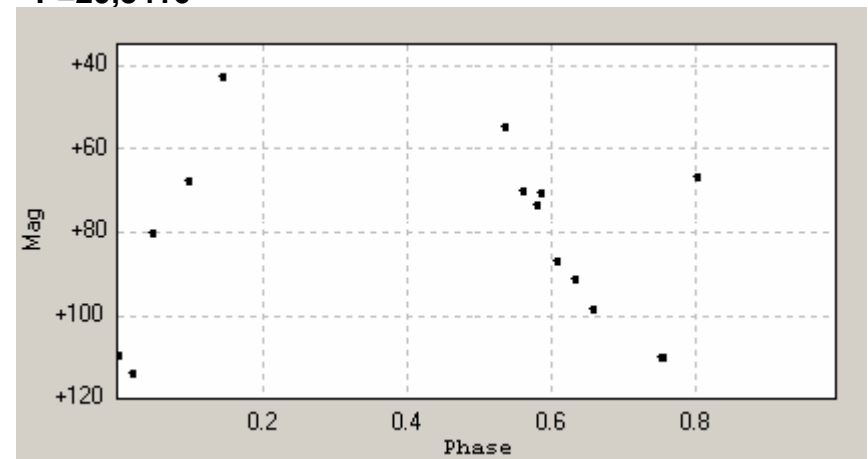
Aus den Differenzenbeträgen lässt sich mit *Peranso* oder ähnlichen Zeitserienanalysen-Programmen unabhängig die Periode bestimmen. Die ist nachfolgend demonstriert.

Mit einem kleinen Datensatz (14 Mittelwerte aus der H α - und den Si-Linien aus 2007 und 2008) lässt sich die Periode nur ungenau bestimmen.

ANOVA

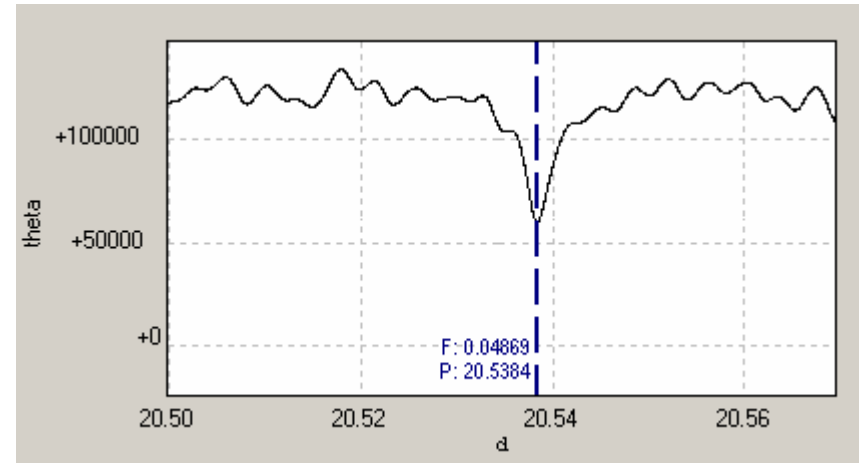


P=20,5416

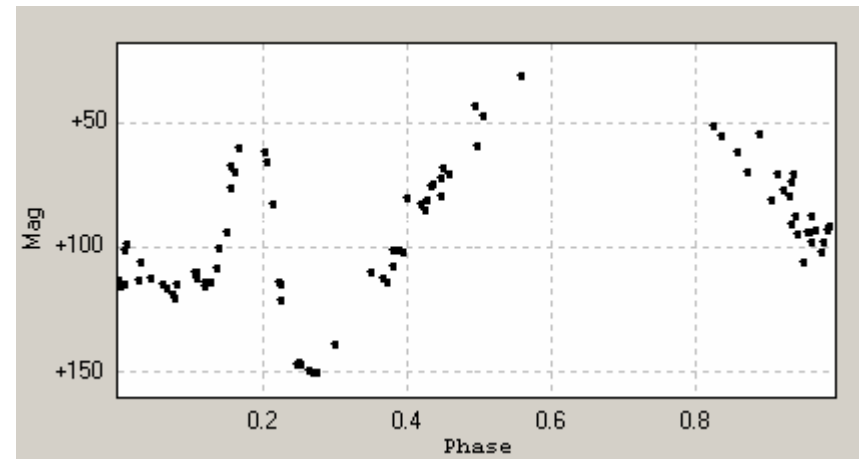


Der Datensatz aus den Differenzen aus 1931 bis 2008 (de Strobel, Cesco, Fehrenbach, Schanne) ergibt erwartungsgemäß eine deutlich höhere Genauigkeit der Periode.

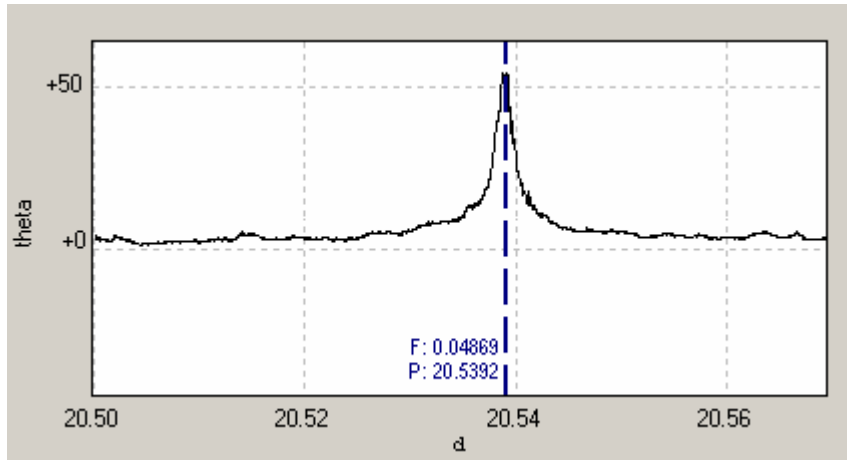
FALC



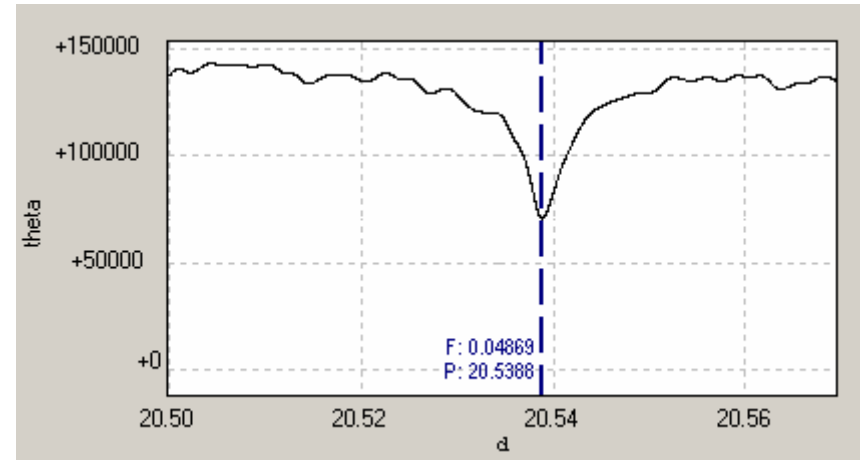
P=20,5384 +/- 0,0001



AOV

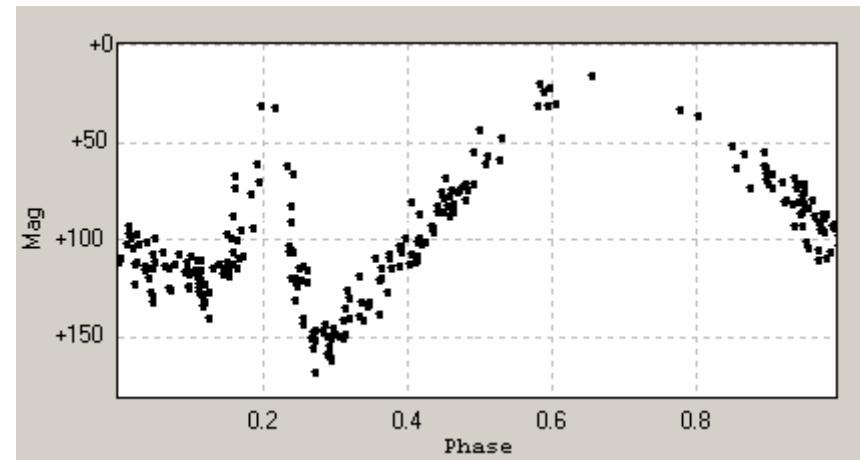


FALC



Werden alle Differenzen seit 1901 einbezogen (außer Hnatek), fällt die berechnete Periode etwas höher aus.

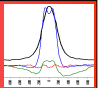
P=20.5388 +/- 0,0001



Übersicht der Ergebnisse der Periodenbestimmung mit Peranso, unterschiedliche Methoden und Zeitbedeckungen der Datensätze

	Lomb-Scargle	CLEANest	FALC	ANOVA	AoV
Schanne (2007-2008)	20,7155	20,5148 +/- 0,5284	20,5520 +/- 0,0127	50,5416	ngD
1901 bis 1906	20,5362 +/- 0,0924	20,5402 +/- 0,0522	20,5347 +/- 0,0023	20,5302 +/-0,0214	ngD
1901 bis 1913	20,5416 +/- 0,0248	20,5382 +/- 0,0157	20,5377 +/- 0,0008	20,5379 +/- 0,0054	ngD
1931 bis 2008	20,5382 +/- 0,0060	20,5388 +/- 0,0024	20,5384 +/- 0,0001	20,5388 +/- 0,0008	ngD
1901 bis 2008	20,5388 +/- 0,0078	20,5388 +/-0,0042	20,5388 +/- 0,0001	20,5389 +/- 0,0010	20,5392 +/- 0,0006

ngD = nicht genug Daten



Zusammenfassung zur „RV-Differenzenmethode“

1. Die Methode erfordert keinen Spalt im Spektrographen.
2. Aus spaltlos gemessenen Spektren ausreichender Auflösung lassen sich die Beträge $|\Delta v_r|$ der Radialgeschwindigkeitsdifferenzen der Komponenten von SB2-Systemen in Funktion des Meßzeitpunktes entnehmen (Zeitreihe der $|\Delta v_r|$).
3. Eine Kalibrierung der Spektren ist nicht erforderlich, die Kenntnis der Dispersion genügt. Es entfällt dementsprechend auch die baryzentrische Korrektur. Spektren mit großer Steigung des Kontinuums sollten auf das Kontinuum normiert werden. Die Messfehler der $|\Delta v_r|$ sollten nicht größer wie ± 5 km/s sein.
4. Mit geeigneten Rechenmethoden lassen sich die folgenden Orbitalelemente des Systems bestimmen:
 - P und T_0
 - e
 - ω_1 und ω_2
 - $(K_1 + K_2)$, gleichbedeutend mit $(a_1 + a_2) \sin i$.
5. Nicht bestimmbar sind
 - die Systemgeschwindigkeit
 - K_1 und K_2 getrennt, gleichbedeutend mit $a_1 \cdot \sin i$ und $a_2 \cdot \sin i$
6. Die erzielbare Genauigkeit der Methode sollte sehr hoch sein, weil nur die Dispersion bekannt sein muß und keine weiteren Kalibrierfehler eingehen!

Die „RV-Differenzenmethode“ eröffnet dem Amateur die Möglichkeit, sich dem Thema Doppelsterne (SB2) experimentell zu nähern, ohne einen Spaltspektrographen besitzen zu müssen. Ein spaltloser Spektrograph ausreichenden Auflösungsvermögens genügt. Die Genauigkeit der ermittelten Orbitalelemente ist den aus absoluten Radialgeschwindigkeitsmessungen bestimmten ebenbürtig oder besser.



NPOI Observations of Mizar A
(ξ^1 Ursa Majoris)

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit

Orbital Phase: 000°

Mizar, 88 light years distant, is the middle star in the handle of the Big Dipper. It was the first binary star system to be imaged with a telescope. Spectroscopic observations show periodic Doppler shifts in the spectra of Mizar A and B, indicating that they are each binary stars. But they were too close to be directly imaged - until 2 May 1996, when the NPOI produced the first image of Mizar A. That image was the highest angular resolution image ever made in optical astronomy. Since then, the NPOI has observed Mizar A in 23 different positions over half the binary orbit. These images have been combined here to make a movie of the orbit. As a reference point, one component has been fixed at the map center; in reality, the two stars are of comparable size and revolve about a common central position.

