

# Ermittlung der Bahnelemente von Doppelsternen aus Radialgeschwindigkeitsmessungen

© Dr Lothar Schanne

Hohlstrasse 19, D-66333 Völklingen)

## 1 Zusammenfassung

Es wird eine Methode zur Bestimmung von Bahnelementen von Doppelsternsystemen vorgestellt, die sich auf Radialgeschwindigkeitsmessungen stützt. Mangels ausreichender großer eigener Datensätze werden Messwerte an Mizar A von Fehrenbach (1961) verwendet. In diesem ersten Teil werden Schätzwerte für die Bahnelemente nach der Methode von Irwin berechnet.

## 2 Kurze Beschreibung des Doppelsternsystems Mizar A

Mizar wurde bereits 1650 von Riccioli als erster visueller Doppelstern beschrieben. Die beiden Komponenten A und B sind 14,4" voneinander entfernt und besitzen die Magnituden 2,4 und 4,0. Später war dieses Doppelsternsystem auch das erste, das fotografiert wurde (1857 durch G.P. Bond, Harvard). Und dann wurde die helle Komponente A (ein A2 Stern) auch noch der erste entdeckte spektroskopische Doppelstern (1889, Pickering). Er bemerkte im Spektrum des Sterns, dass sich die Linien regelmäßig mit einer Periode von 20,5 Tagen aufspalten und wieder zusammengehen. Später wurde dann festgestellt (1908, E.B. Frost), dass auch die Komponente B ein spektroskopischer Doppelstern ist ( $P = 182,33$  d), wir es also insgesamt mit einem Fünffachsystem zu tun haben<sup>1</sup>.

## 3 Die Beschreibung der Raumkurven der Komponenten von Doppelsternen durch Bahnelemente

Entsprechend den Keplerschen Gesetzen umlaufen die beiden Komponenten eines Doppelsterns ihren gemeinsamen Schwerpunkt auf elliptischen Bahnen, die in einer Ebene liegen. Zu jedem Zeitpunkt stehen sich die Komponenten genau gegenüber (auf einer Verbindungslinie durch den Schwerpunkt). Die Bahnebene liegt im Allgemeinen schräg zur Tangentialebene (= tangentielle Ebene an die Himmelskugel in der Sichtlinie des Beobachters). Die Verhältnisse sind in Abb. 1 schematisch veranschaulicht.

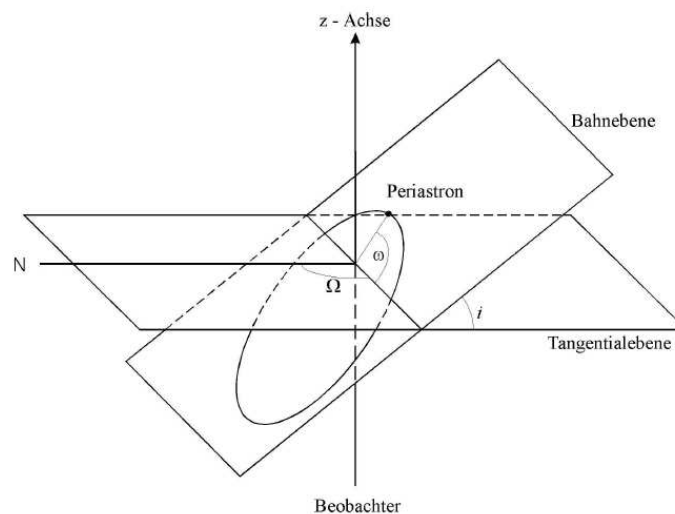


Abbildung 1 Definition der geometrischen Bahnelemente (aus Dissertation Schweickardt, Heidelberg 2000)

Die *Orientierung* der Bahn wird durch drei geometrische Bahnelemente eindeutig festgelegt (Abb. 1):

- $i$ : Inklination (Winkel zwischen Bahnebene und Tangentialebene)
- $\omega$ : Periastronlänge (Winkel zwischen aufsteigendem Knoten und Periastron)
- $\Omega$ : Positionswinkel der Knotenlinie von Bahn- und Tangentialebene relativ zum Himmelsnordpol.

Um den Ort einer Komponente zu einem gegebenen Zeitpunkt berechnen zu können ist noch zusätzlich die Kenntnis der vier dynamischen Bahnelemente erforderlich:

- $P$ : Bahnperiode (in Zeiteinheiten, meist Tage)
- $e$ : Numerische Exzentrizität der Bahnellipse
- $T_0$ : Zeitpunkt eines Periastrondurchganges
- $a$ : Große Halbachse der Ellipse

Radialgeschwindigkeitsmessungen zeigen lediglich die auf die Sichtlinie projizierten Bewegungen. Andererseits ergeben astrometrische Messungen die auf die Tangentialebene projizierten Geschwindigkeiten (als Zeitableitung von Koordinatenänderungen). Nur bei Kenntnis beider Geschwindigkeitskomponenten können die absoluten Bahnelemente ermittelt werden.

Eine mathematische Ableitung führt für die spektroskopisch messbaren Radialgeschwindigkeiten auf die folgenden Zusammenhänge<sup>1</sup>:

$$v_{\text{rad}} = \gamma + K (e \cos \omega + \cos(\omega+v)) \quad (1)$$

$$K = (2\pi/P) a \sin i / \sqrt{1-e^2} \quad (2)$$

Die messbare Radialgeschwindigkeit  $v_{\text{rad}}$  besteht aus zwei Komponenten: Die Systemgeschwindigkeit  $\gamma$  des Schwerpunkts und die aus der Orbitalbewegung resultierende Geschwindigkeit  $K (e \cos \omega + \cos(\omega+v))$ .  $K$  ist die halbe Radialgeschwindigkeitsamplitude,  $v$  ist die wahre Anomalie (der zeitabhängige Winkel vom Periastron bis zur Komponente, durchläuft in einer Periode 0 bis 360°).

Während bei kreisförmigen Bahnbewegungen die absolute Geschwindigkeit eines Objekts konstant bleibt - die messbare Radialgeschwindigkeit (= projizierte Geschwindigkeit auf die Sichtlinie) hat dann einen streng sinusförmigen symmetrischen Verlauf - werden bei elliptischen Bahnen die Zusammenhänge komplexer (transzendent).

In (1) ist nur die wahre Anomalie ( $v$ ) zeitabhängig. Alle anderen Größen sind Konstanten. Die Zeitabhängigkeit von  $v$  lässt sich mit der exzentrischen Anomalie  $E$  und der transzendenten Keplerschen Gleichung darstellen:

$$\tan (E/2) = \sqrt{(1-e)/(1+e)} \tan(v/2) \quad (3)$$

$$E - e \sin E = (2\pi/P) (t - T_0) \quad (4)$$

Wegen der Transzendenz der Gl. (4) lassen sich die Bahnparameter über die Gleichungen (1) bis (4) nur iterativ an die Messwerte anpassen. In einer solchen Prozedur werden dann die Bahnparameter  $K_1$ ,  $e$ ,  $\omega$ ,  $\gamma$  und  $T_0$  ermittelt.

Wenn  $P$  unabhängig bestimmt wird, lässt sich mit (2) aus  $K_1$  die Größe  $a_1 \sin i$  berechnen, das ist die projizierte Halbachse der Bahnellipse (für die zweite Komponente  $a_2 \sin i$  analog aus  $K_2$ ). Die Inklination  $i$  und damit  $a_1$  selbst sind als eigenständige Größen aus spektroskopischen Messungen nicht zu ermitteln.

<sup>1</sup> Die Zusammenhänge sind in dem Klassiker R.G. Aitken, *The Binary Stars*, 1935, bestens erläutert.

## 4 Sichtung des Datenmaterials

Am Beispiel von Radialgeschwindigkeitsmessungen des spektroskopischen Doppelsterns Mizar A (Typ SB2, Messwerte aus Fehrenbach 1961<sup>ii</sup>) wird die Ermittlung der Bahnelemente mit einer auch dem Amateur zugänglichen Methode (Irwin<sup>iii</sup>) beschrieben.

DATUM [JD]	RADIALGESCHWINDIGKEIT RV [KM/S]	
	Primärkomponente	Sekundärkomponente
2437016.413	45.6	-54.1
2437030.480	21.3	-29.9
2437031.451	28.6	-40.5
2437032.490	32.1	-44.8
2437033.376	42.0	-50.3
2437035.448	54.1	-62.2
2437036.554	50.7	-63.2
2437037.500	21.5	-38.5
2437038.474	-48.6	33.8
2437039.523	-78.8	70.4
2437043.478	-38.7	31.8
2437044.460	-29.4	17.6
2437045.521	-20.4	10.3
2437103.527	-61.1	46.3
2437104.420	-50.7	34.1
2437121.358	-80.8	64.9
2437124.355	-60.6	40.8

Tabelle 1 Radialgeschwindigkeiten der Komponenten

Die gemessenen baryzentrischen Radialgeschwindigkeiten beider Komponenten sind in Tabelle 1 aufgeführt (Fehrenbach 1961). Werden die Messwerte gegen das Datum aufgetragen, ergibt sich Abb. 2.

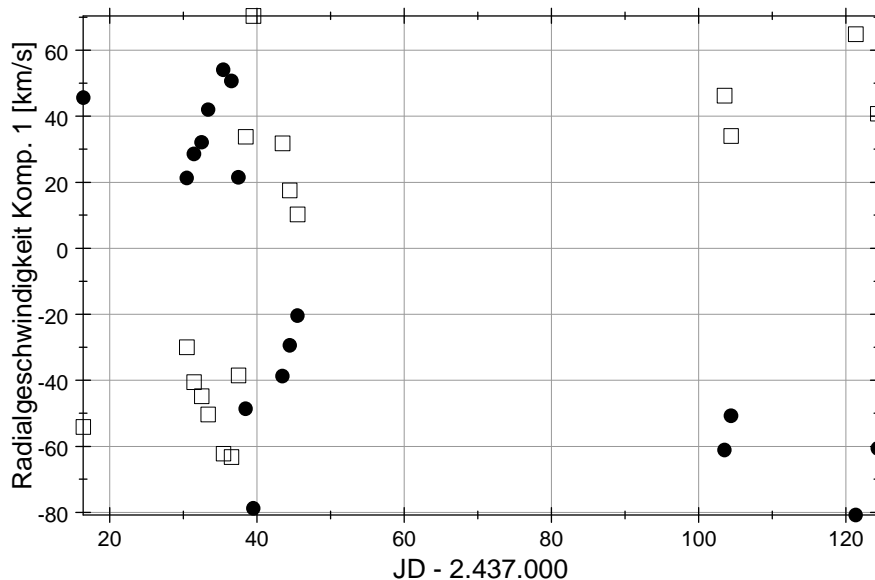


Abbildung 2 Auftragung der Radialgeschwindigkeiten (aus Fehrenbach 1961) gegen das Datum (gefüllte Kreise = Primärkomponente, nicht-gefüllte Quadrate = Sekundärkomponente)

Allgemein sind in einem solchen Diagramm nur schwierig Periodizitäten zu erkennen. Erst wenn die Messwerte in einem Phasendiagramm angeordnet sind, wird die Regelmäßigkeit der Bahnbewegung deutlich. Dazu muß die Periode P als erstes Bahnelement bekannt sein.

## 5 Unabhängige Ermittlung der Periode

Wie ermittelt man nun diese Periode  $P$  aus dem Datensatz?

Eine Möglichkeit ist die Anwendung der TSA (time series analysis = Zeitserienanalyse). Dafür ist beispielsweise das PC-Programm Peranso geeignet, das von Amateuren bei photometrischen Messungen zur Periodenbestimmung eingesetzt wird<sup>2</sup>.

In den Abb. 3 und 4 werden die Periodenfenster für die RV beider Komponenten gezeigt.

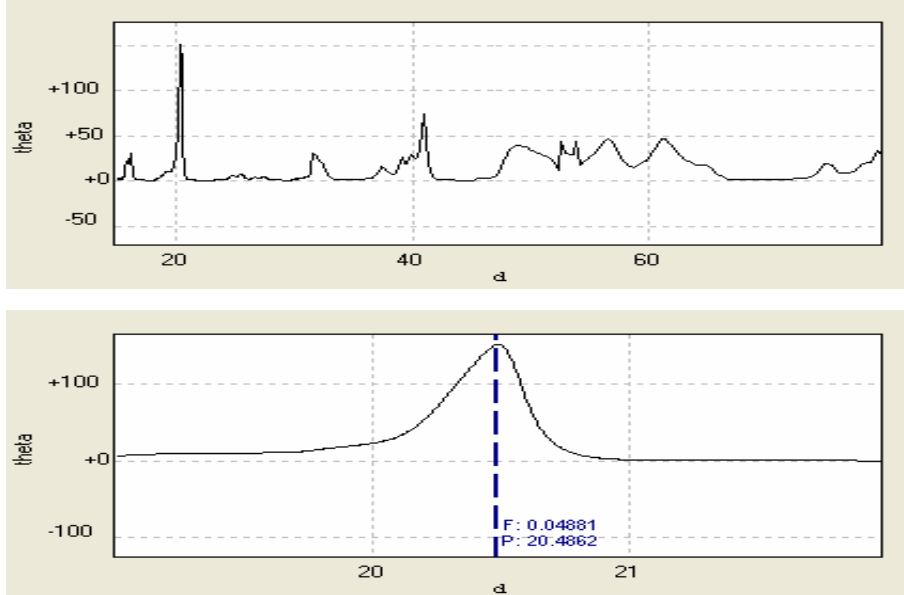


Abbildung 3 Periodenfenster Primärkomponente (Peranso, Methode ANOVA, 5harm.)

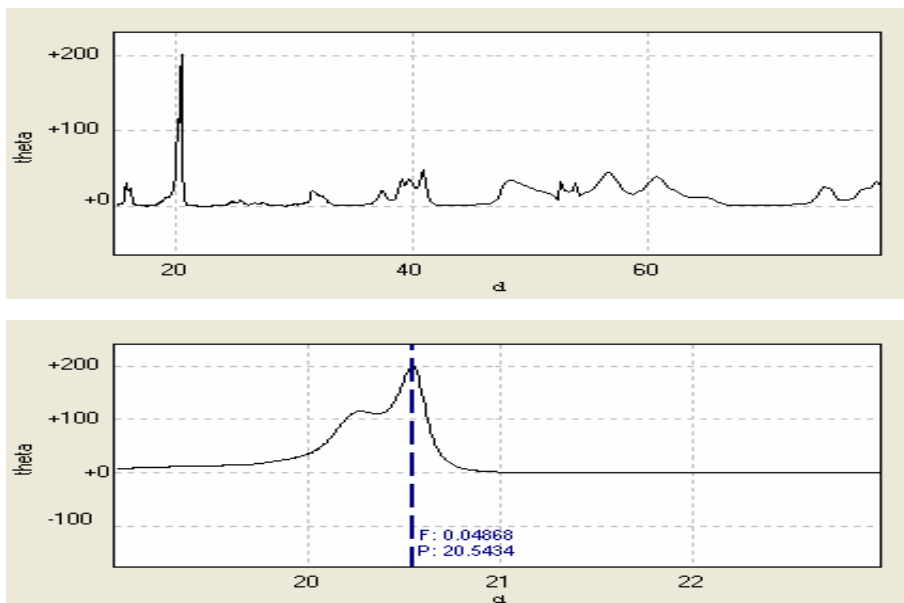


Abbildung 4 Periodenfenster Sekundärkomponente (Peranso, Methode ANOVA, 5 harm.)

Im jeweiligen Übersichtsfenster (obere Hälfte der Abb. 3 und 4), das die Perioden innerhalb 15 bis 80 d umfasst, ist ein Peak um 20 d dominierend. Wird die Analyse auf den Bereich um 20 d verfeinert ergeben sich die Perioden zu 20.4862 und 20.5434 d, im Mittel **20.5184 d**.

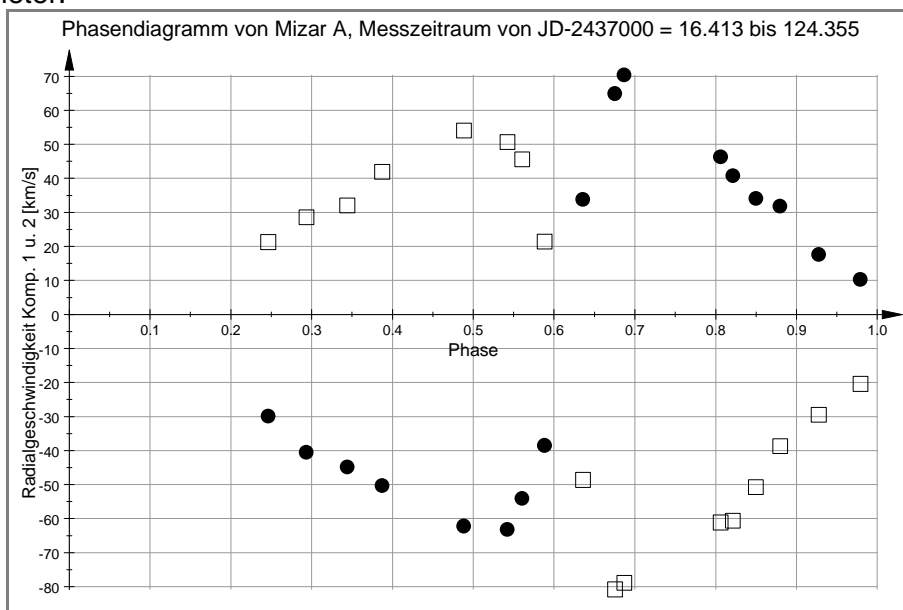
<sup>2</sup> <http://www.peranso.com/>

## 6 Ermittlung der Bahnelemente

Mit diesem vorläufigen Schätzwert für  $P$  lassen sich die Messdaten auf eine Periode reduzieren. Dazu werden die RV's aller Messwertepaare (RV, JD) umgerechnet:

$$rv = (t-T)/P - \text{trunc}((t-T)/P) \quad (5)$$

In (5) beutet  $\text{trunc}()$ , dass die Kommastellen abgeschnitten werden und die verbleibende Ganzzahl verwendet wird. Mit Gleichung (5) werden alle RV in reduzierte  $rv$  überführt, die in einer Phase von  $0 \dots 1$  liegen. Den Messwerten wird also eine normierte zyklische Zeitkoordinate zugeordnet. Für  $T$  wurde in beliebiger Weise der Zeitpunkt der ersten Messung (JD 2437016.413) verwendet. Allerdings muss für die Ermittlung des richtigen Phasendiagramms der Zeitpunkt des Periastrondurchgangs  $T_0$  bekannt sein. Da  $T$  ersatzweise beliebig gewählt wurde, ergibt sich aus den  $rv$  nach (5) ein phasenverschobenes Phasendiagramm (Abb. 5), das aber seinen Zweck erfüllt: Die Schätzung weiterer Bahnparameter.



**Abbildung 5 Phasenverschobenes Phasendiagramm (gefüllte Kreise = Primärkomponente, nicht-gefüllte Quadrate = Sekundärkomponente)**

Im Folgenden wird die Auswertungsmethode nach Irwin (1952) verwendet, die den Vorteil hat, dass aus charakteristischen Punkten der  $rv$ -Kurven in Abb. 5 relativ einfach Schätzer für weitere Bahnelemente gewonnen werden können.

In Abb. 5 werden die maximale und die minimale Geschwindigkeit der Komponenten abgeschätzt:

$$V_{1\max} = 54 \text{ km/s} \quad V_{1\min} = -80.5 \text{ km/s}$$

$$V_{2\max} = 70.5 \text{ km/s} \quad V_{2\min} = -63 \text{ km/s}$$

Die mittleren Geschwindigkeiten  $V_{1m}$  und  $V_{2m}$  [km/s] betragen dann:

$$V_{1m} = 1/2 \cdot (V_{1\max} + V_{1\min}) = -13,25 \text{ km/s}$$

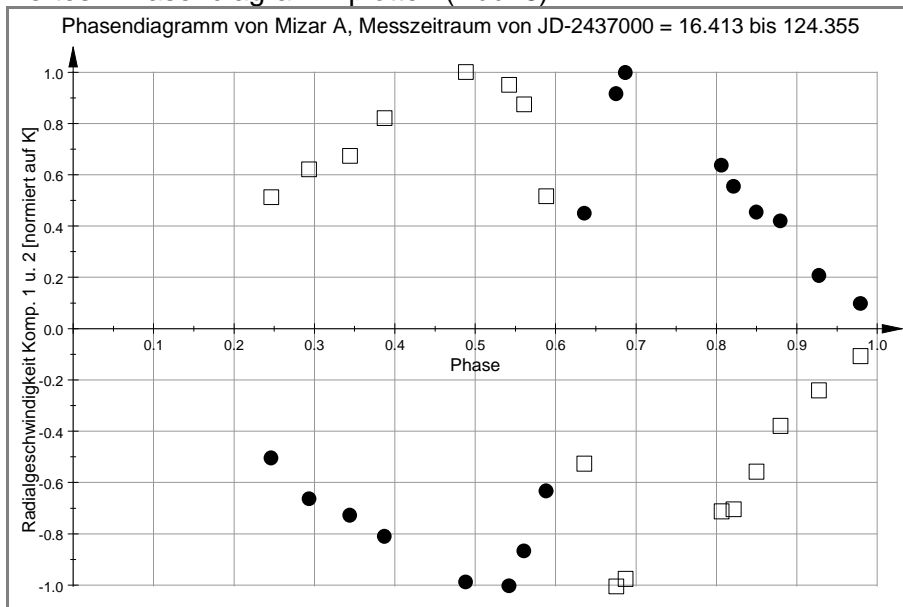
$$V_{2m} = 1/2 \cdot (V_{2\max} + V_{2\min}) = 3,75 \text{ km/s}$$

Dann berechnen sich die Konstanten  $K_1$  und  $K_2$  [km/s] zu

$$K_1 = V_{1\max} - V_{1m} = 67,25 \text{ km/s}$$

$$K_2 = V_{2\max} - V_{2m} = 66,75 \text{ km/s}$$

Alle  $rv$ 's der Komponenten werden jetzt auf die mittlere Geschwindigkeit  $V_{1m}$  bzw.  $V_{2m}$  bezogen und mit  $K_1$  bzw.  $K_2$  normiert (identisch  $\cos(\omega + v)$  in Gl. (1) ). Damit lässt sich ein neues „normiertes“ Phasendiagramm plotten (Abb. 6).



**Abbildung 6 Normiertes Phasendiagramm (gefüllte Kreise = Primärkomponente, nicht-gefüllte Quadrate = Sekundärkomponente)**

Im Falle der Methode nach Irwin werden bestimmte Werte aus der Abb. 6 entnommen: Die Maxima und Minima, die Nullstellen und die Werte bei der relativen  $rv = \pm 0,7$ . Mit den so ermittelten Phasen für diese  $rv$  werden mittels vorausberechneter Wertetabellen Wertepaare  $(e, \omega)$  erzeugt, die in einer Grafik aufgetragenen Schnittpunkte ergeben. Aus der Streuung der Schnittpunkte und einem gemitteltem Schnittpunkt aus den 3 bis 9 Kurven ergeben sich dann Schätzwerte für  $e$  und  $\omega$ .

Die Phasen der charakteristischen Punkte<sup>3</sup> in Abb. 6 betragen für die Primärkomponente  $a = 0, b = 0.35, c = 0.48, d = 0.57, e = 0.61, f = 0.65, g = 0.67, h = 0,82, i = 1.02$ . Daraus ergibt die graphische Auswertung nach der Methode Irwin die Schätzwerte für<sup>4</sup>

$$\omega_1 = 110 \pm 20^\circ \text{ und } e_1 = 0.48 \pm 0.035$$

und für die Sekundärkomponente

$$a=0.61, b=0.66, c=0.685, d=0.78, e=1.02, f=0.31, g=0.54, h=0.58, i=0.62.$$

$$\omega_2 = 285 \pm 10^\circ, e_2 = 0.50 \pm 0.05.$$

Wegen der festen Phasenbeziehung  $\omega_2 - \omega_1 = 180^\circ$  lassen sich beide  $\omega$  zu einem verbesserten Wert mitteln:

$$\omega_1 = 107,5^\circ \quad \omega_2 = 287,5^\circ$$

Aus der Beziehung

$$\gamma = V_m - K e \cos \omega$$

berechnen sich die Systemgeschwindigkeiten zu

$$\gamma_1 = -3,54 \text{ km/s} \quad \gamma_2 = -6,28 \text{ km/s}$$

<sup>3</sup> Das sind die Phasen der normierten  $rv$

0..0,7..10,7..0..-0,7..-1..0,7..0 Primärkomponente.

0..- 0,7..-1..-0,7..0..0,7..1..0,7..0 Sekundärkomponente

<sup>4</sup> Die Details der grafischen Auswertung werden aus Platzgründen hier nicht gezeigt.

Da es nur eine Systemgeschwindigkeit gibt, können sie zur Systemgeschwindigkeit  $\gamma$  gemittelt werden:

$$\gamma = -4,9 \text{ km/s.}$$

Die projizierten Halbachsen der Ellipsen berechnen sich zu

$$a_1 \sin i = 13750 K_1 P \sqrt{1-e_1^2} = 16\,644\,509$$

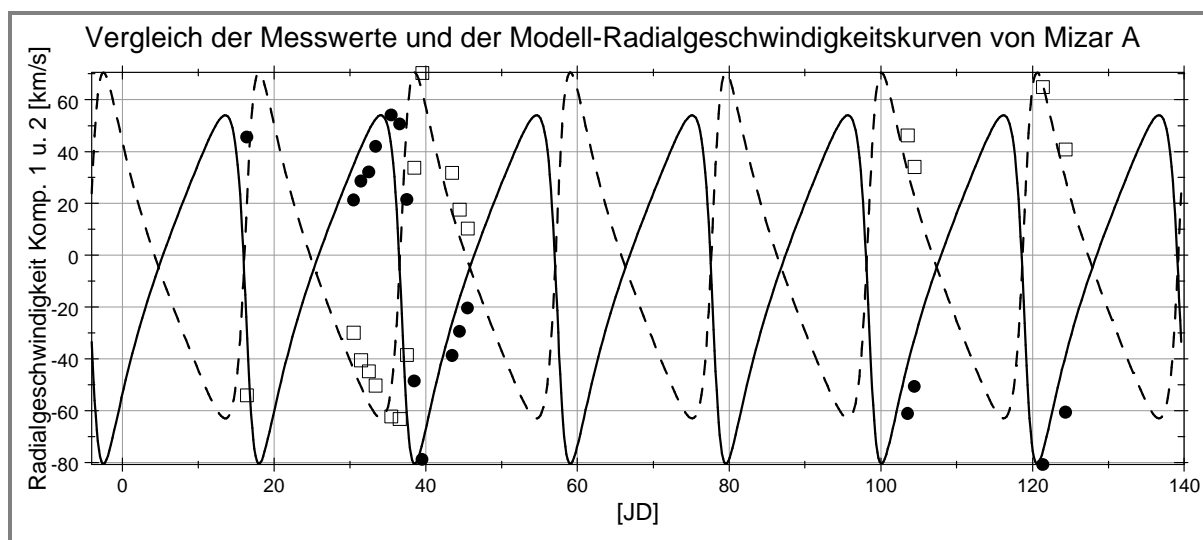
$$a_2 \sin i = 13750 K_2 P \sqrt{1-e_2^2} = 16\,300\,028$$

Aus den bisher ermittelten Größen lässt sich auch ein Zeitpunkt  $T_0$  der Periastronpassage bestimmen. Dazu werden zuerst die Geschwindigkeiten  $V_P$  zu diesem Zeitpunkt nach der folgenden Beziehung berechnet:

$$V_P = V_m + K \cos \omega$$

Daraus resultieren  $V_{P1} = -33,5 \text{ km/s}$  und  $V_{P2} = 23,8 \text{ km/s}$ . Laut Abb.2 ist dieses Wertepaar etwa für  $\text{JD} = 37 + 2437000$  zu erwarten (Schätzwert).

Werden nun die Messwerte zusammen mit den aus den oben ermittelten Bahnelementen und  $T_0 = 37 + 2437000$  berechneten Radialgeschwindigkeitskurven dargestellt, ergibt sich Abb. 7.



**Abbildung 7** Vergleich der RV-Messwerte und der aus den ermittelten Bahnelementen berechneten RV-Kurven (Kreise und durchgezogene Linie = Komponente 1, offene Quadrate und gestrichelte Linie = Komponente 2)

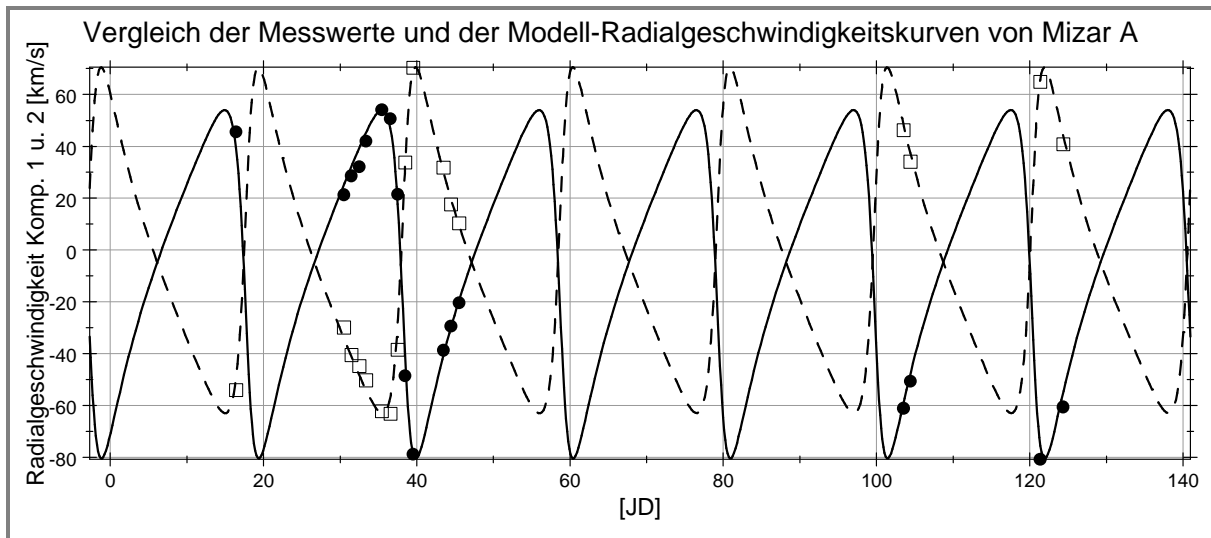
Deutlich ist eine Horizontalverschiebung zu sehen, wobei allerdings der Verlauf der Messwerte gut wiedergegeben wird.

Durch Variation (und Ergebnisvergleich) von  $T_0 = 37$  auf  $38,7$  wird die Horizontalverschiebung behoben und die Kongruenz von Messwerten und berechneten Radialgeschwindigkeitskurven ist jetzt befriedigend (Abb. 8)<sup>5</sup>.

Damit ist ein vorläufiger Datensatz der Bahnelemente des Mizar A Systems aus den Messwerten von Fehrenbach bestimmt, der in einem weiteren Schritt durch Anwendung differentieller Korrekturen (least squares) noch verbessert werden kann. Dies ist umfangsbedingt einem zweiten Artikel vorbehalten.

<sup>5</sup> Für die Berechnungen wurde ein in MuPAD geschriebenes Arbeitsblatt entwickelt.

Die Tabelle 2 werden die hier ermittelten Bahnelemente mit den genaueren aus der Literatur verglichen.



**Abbildung 8** Vergleich der RV-Messwerte und der aus den ermittelten Bahnelementen berechneten RV-Kurven unter Verwendung eines verbesserten Zeitpunkts für die Periastronpassage ( $T_0 = 2.437.028,7$  JD)

**Tabelle 2** Vergleich der vorläufigen Bahnelemente mit Literaturdaten

BAHNELEMENT	DIESER ARTIKEL	FEHRENBACH 1961	CESCO 1946 <sup>iv</sup>	HADLEY 1912 <sup>6</sup>
Periode P [d]	20,5184	20,53860	20,53860 ± 0,00003	
Systemgeschwindigkeit $\gamma$ [km/s]	-4,91	-5,64 ± 0,15	-6,39 ± 0,41	-7,22
$K_1$ [km/s]	67,25	68,80 ± 0,79	65,33 ± 0,88	71,65 ± ,69
$K_2$ [km/s]	66,75	67,70 ± 0,91	66,99 ± 0,88	69,21 ± 0,56
e	0,49	0,537 ± 0,04	0,541 ± 0,006	0,53248 ± 0,00530
$\omega_1$ [°]	107,5	104,16 ± 1,15	103,29 ± 1,13	105°35',9 ± 1°33',8
T [JD]	2437038,7	2436997,212 ± 0,022	2431636,591 ± 0,032	
$a_1 \sin i$ [km]	16,6*10 <sup>6</sup>	16,5 *10 <sup>6</sup>	15,3*10 <sup>6</sup>	17,31*10 <sup>6</sup>
$a_2 \sin i$ [km]	16,3*10 <sup>6</sup>	16,3 *10 <sup>6</sup>	15,7*10 <sup>6</sup>	16,39*10 <sup>6</sup>

*Den Herren Otmar Stahl und Roland Bücke sei für die zahlreichen Diskussionen und die freundschaftliche Zusammenarbeit gedankt, die mir den Einstieg in dieses für Amateure schwierige Thema wesentlich erleichtert haben.*

#### Literatur

- <sup>i</sup> Vgl. beispielsweise Burnhams Celestial Handbook, Vol III, S. 1953 ff  
<sup>ii</sup> C. Fehrenbach, L. Prevot, Publ. Obs. Haute Provence, 5, 26, 83 ff (1961)  
<sup>iii</sup> John B. Irwin, ApJ 116, 218-226 (1952)  
<sup>iv</sup> Carlo U. Cesco, ApJ 104, 287- 290 (1946)

<sup>6</sup> In IV zu finden (Tab. 3).